Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2025-2026
Esercizi, foglio 3

1. Sia Q_8 il *gruppo dei quaternioni*, cioè il sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ generato dalle matrici

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che $Q_8 = \{-1, -i, -j, -k, 1, i, j, k\}$ ove $1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ è la matrice identità.

   (b) Verificare che
$$(\pm 1)^2 = 1, \qquad (\pm i)^2 = (\pm j)^2 = (\pm k)^2 = -1,$$
$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ik = -j = -ki, \qquad ijk = -1.$$

   (c) Calcolare l'ordine di ogni elemento di Q_8.

   (d) Elencare tutti i sottogruppi di Q_8.

2. Sia G un gruppo e sia $\{H_i\}_{i\in I}$ una qualsiasi famiglia di sottogruppi di G. Dimostrare che l'intersezione $H = \bigcap_{i\in I} H_i \subseteq G$ è ancora un sottogruppo di G.

3. Siano G e G' gruppi e sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G')$.

   (a) Dimostrare che se H' e K' sono sottogruppi di G' allora:
$$\varphi^{-1}(H' \cap K') = \varphi^{-1}(H') \cap \varphi^{-1}(K'), \qquad \varphi^{-1}(H' \vee K') \supseteq \varphi^{-1}(H') \vee \varphi^{-1}(K').$$

   (b) Dimostrare che se H e K sono sottogruppi di G allora:
$$\varphi(H \cap K) \subseteq \varphi(H) \cap \varphi(K), \qquad \varphi(H \vee K) = \varphi(H) \vee \varphi(K).$$

   (c) Dare esempi in cui le due inclusioni
$$\varphi(H \cap K) \subseteq \varphi(H) \cap \varphi(K), \qquad \varphi^{-1}(H' \vee K') \supseteq \varphi^{-1}(H') \vee \varphi^{-1}(K')$$
   sono inclusioni strette (cioè non vale l'uguaglianza).

4. Sia G un gruppo e siano H e K sottogruppi di G.

   (a) Verificare che $H \cup K$ è un sottogruppo se e solo se o $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

   (b) Dimostrare che $H \vee K = < H \cup K >$.

   (c) Dimostrare che se $G = H \cup K$, e H è un sottogruppo proprio, allora $G = K$.

5. Sia G un gruppo, $a, b \in G$. Verificare che

$$\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(a^{-1}), \qquad \mathrm{ord}(b^{-1}ab) = \mathrm{ord}(a), \qquad \mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba).$$

6. Siano $(G, \star)$ e $(H, *)$ gruppi, e si consideri il gruppo prodotto cartesiano $G \times H$, dotato dell'operazione

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 \star g_2, h_1 * h_2).$$

Siano $g \in G$ e $h \in H$ elementi di ordine finito. Verificare che l'ordine di $(g, h) \in G \times H$ è :

$$\mathrm{ord}(g, h) = \mathrm{mcm}(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h)),$$

dove mcm = minimo comune multiplo.

7. Sia G un gruppo abeliano e sia $T(G) \subseteq G$ *l'insieme di torsione di* G, cioè il sottoinsieme degli elementi di ordine finito.

   (a) Verificare che se $a, b \in T(G)$ e $m = \mathrm{mcm}(\mathrm{ord}(a), \mathrm{ord}(b))$ allora $(ab)^m = 1$.

   (b) Dimostrare che per ogni $a, b \in T(G)$ risulta $\mathrm{ord}(ab) | m$: dare un esempio in cui non vale l'uguaglianza.

   (c) Se $a, b \in T(G)$ hanno ordini coprimi, allora $\mathrm{ord}(ab) = m$.

   (d) Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.

8. (a) Per ogni $a \in \mathbb{R}^*$ calcolare l'ordine della matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

   È vero o falso che l'insieme di torsione $T(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ è un sottogruppo?

   (b) Per ogni $a \in \mathbb{R}^*$ calcolare l'ordine della matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a^n \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

   (c) Stabilire se l'insieme degli elementi di ordine al più 2 di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ forma un sottogruppo.

9. Sia D il sottoinsieme delle matrici diagonali in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Dimostrare che D è un sottogruppo, isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

   (b) Per ogni $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sia φ_P il coniugio rispetto a P; per quali P vale che $\varphi_P(D) \not\subseteq D$?

10. Sia G un gruppo. Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi\colon G &\to G \\ g &\mapsto g^2 \end{aligned}$$

è un omomorfismo se e solo se G è abeliano. Nel caso in cui G sia abeliano, stabilire se φ è un automorfismo.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!