Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2025-2026

Esercizi, foglio 10

1. Calcolare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di

$$\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{7}, \qquad \beta = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \qquad \gamma = 1 - \sqrt[3]{5}.$$

2. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ due elementi algebrici su $\mathbb{Q}$, e supponiamo che i loro polinomi minimi su $\mathbb{Q}$ abbiano entrambi grado 2.

   (a) Dimostrare che $K_\alpha = \mathbb{Q}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$ è un sottocampo tale che $[K_\alpha : \mathbb{Q}] = 2$.

   (b) Dimostrare che $K_{\alpha,\beta} = K_\alpha[\beta]$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$, e calcolare i possibili valori di $[K_{\alpha,\beta} : \mathbb{Q}]$.

   (c) Dedurre che $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$; quali sono i possibili valori del grado dei loro polinomi minimi su $\mathbb{Q}$?

3. Sia $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ è algebrico su } \mathbb{Q}\}$.

   (a) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$: dimostrare che $\alpha^{-1}, \alpha + \beta, \alpha\beta \in \mathbb{A}$.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{A}$ è un sottocampo numerabile di $\mathbb{C}$.

4. Sia $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p(\sqrt{2}) \in \mathbb{C} \mid p(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$.

   (a) Calcolare il polinomio minimo di $\sqrt{2}$ su $\mathbb{Q}$.

   (b) Determinare $a, b \in \mathbb{Q}$ per cui vale l'uguaglianza $(\sqrt{2})^{-1} = a + b\sqrt{2}$.

   (c) Verificare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

   (d) Mostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è algebrico e calcolare il grado del suo polinomio minimo (su $\mathbb{Q}$).

5. Sia $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$. Calcolare il polinomio minimo di $1 + \alpha^2$ su $\mathbb{Q}$.

6. Sia $\alpha = 1 + i\sqrt{5} \in \mathbb{C}$.

   (a) Verificare che $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo, estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ di dimensione 2.

   (b) È vero o falso che K è un'estensione di $\mathbb{R}$?

7. Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 + x + 2$.
   (a) Determinare i fattori irriducibili di $p(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.
   (b) Sia $\alpha \notin \mathbb{Q}$ una radice di $p(x)$ e sia $K_\alpha = \mathbb{Q}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$: calcolare $[K_\alpha : \mathbb{Q}]$.
   (c) Mostrare che non può esistere un elemento $u \in K_\alpha$ tale che $u^2 + 1 = 0$.

8. Siano $p(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, $I = (p(x))$ e $K = \mathbb{Q}[x]/I$.
   (a) Verificare che K è un campo.
   (b) Dimostrare che non esiste $u \in K$ tale che $u^2 + 1 = 0$.

9. Sia $K = \{a_1, \ldots, a_N\}$ un campo finito con $0_K \neq 1_K$.
   (a) Esiste un polinomio $p(x) \in K[x] \setminus \{0_K\}$ tale che la funzione
   $$\begin{aligned} \varphi_p \colon K &\to K \\ a &\mapsto p(a) \end{aligned}$$
   sia identicamente nulla?
   (b) In caso di risposta affermativa alla precedente domanda, determinare, se esistono, le radici di $p_i(x) = p(x) + a_i$, $i = 1, \ldots, N$.
   (c) Dimostrare che K non è algebricamente chiuso.

10. Sia $p(x) = x^3 + \overline{2}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$, sia $I = (p(x))$ e $K = \mathbb{Z}_3[x]/I$.
   (a) Verificare che $p(x)$ è irriducibile e che I è massimale.
   (b) Calcolare il numero di elementi di K^*.
   (c) Determinare l'ordine delle classi di x, $x + 1$ e $x + 2$ in K.
   (d) Si determini un elemento di K^* di ordine 2 e uno di ordine 13.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!