Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025
Soluzioni foglio 5

1. Siano $G = <g>$ e $H = <h>$ due gruppi ciclici (utilizziamo la notazione moltiplicativa in entrambi), e sia H^G l'insieme delle applicazioni $G \to H$. Dall'esercizio 14 del foglio 1, sappiamo che su H^G possiamo definire una struttura di gruppo, definendo come prodotto delle applicazioni φ e ψ l'applicazione $\varphi\psi \colon G \to H$, $x \mapsto \varphi(x)\psi(x)$. Ricordo anche che l'elemento neutro è l'applicazione costante $1 : G \to H$, $x \mapsto 1_H$.

   (a) Per stabilire se $\mathrm{Hom}(G, H)$ è un sottogruppo di H^G usiamo il criterio: se $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ e $x_1, x_2 \in G$ allora:
   $$\varphi\psi^{-1}(x_1x_2) = \varphi(x_1x_2)\psi(x_1x_2)^{-1} = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\psi(x_1)^{-1}\psi(x_2)^{-1},$$
   $$\varphi\psi^{-1}(x_1)\varphi\psi^{-1}(x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_1)^{-1}\varphi(x_2)\psi(x_2)^{-1}.$$
   In generale gli ultimi membri di queste catene di uguaglianze non coincidono, quindi non è vero, in generale, che
   $$\varphi\psi^{-1}(x_1x_2) = \varphi\psi^{-1}(x_1)\varphi\psi^{-1}(x_2).$$
   Però se H è ciclico allora è anche commutativo, quindi l'uguaglianza è soddisfatta. Concludiamo che se H è ciclico (ma basterebbe anche che fosse solo commutativo), allora $\mathrm{Hom}(G, H)$ è un sottogruppo di H^G.

   (b) Se $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$, abbiamo che
   $$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(g^n) = \varphi(g)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H.$$
   Inoltre
   $$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{g^n \mid \varphi(g)^n = 1_H\} :$$
   quindi se $m = \mathrm{ord}(\varphi(g))$, segue che $\mathrm{Ker}(\varphi) = (<g^m>) < G$.

   (c) Se $\varphi \colon G \to H$ è un isomorfismo, allora $\mathrm{ord}(g) = |G| = |H| = \mathrm{ord}(h)$. In particolare G è infinito se e solo se anche H lo è. Si noti che ogni isomorfismo è suriettivo, quindi se φ è un isomorfismo $\varphi(g)$ deve generare H. D'altra parte φ deve anche essere iniettivo, quindi $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$. In totale quindi un isomorfismo $G \to H$ deve necessariamente mandare il generatore g di G nel generatore h di H. Viceversa, è facile verificare che l'applicazione $G \to H$, $g \mapsto h$ è un isomorfismo.

2. Utilizziamo la notazione moltiplicativa sia in G che in H.

   (a) È una conseguenza del fatto che ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è ciclico, che abbiamo visto a lezione il 29/10. Infatti il monomorfismo φ induce un isomorfismo $G \simeq \mathrm{Im}(\varphi) < H$.

   (b) Sia $G = <g>$ e sia $h \in H$. Allora esiste $\gamma \in G$ tale che $\varphi(\gamma) = h$, poiché φ è suriettivo. Se $\gamma = g^m$, allora $h = \varphi(g)^m$. Quindi $H = <\varphi(g)>$, cioè H è ciclico.

3. Consideriamo un esagono regolare, chiamiamo R la rotazione di $\pi/3$ radianti in senso antiorario e D_i la riflessione rispetto all'i-esimo asse di simmetria dell'esagono, e ricordiamo che i 12 elementi del gruppo diedrale sono

$$\Delta_6 = \{1, R, R^2, R^3, R^4, R^5, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}.$$

Se fissiamo una particolare riflessione, ad esempio D_1, è possibile dare una descrizione alternativa di questi 12 elementi:

$$\Delta_6 = \{1, R, R^2, R^3, R^4, R^5, D_1, RD_1, R^2D_1, R^3D_1, R^4D_1, R^5D_1\},$$

con le relazioni

$$D_1^2 = R^6 = 1 \quad \text{e} \quad D_1R = R^5D_1.$$

Inoltre si ha che

$$<D_1>= \{1, D_1\}, \qquad <R^2>= \{1, R^2, R^4\}.$$

(a) Tenendo conto che $[\,\Delta_6 :< D_1 >] = |\Delta_6|/|< D_1 >| = 6$ e della relazione $D_1R = R^5D_1$, le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<D_1>$ sono:

$$< D_1 > 1 = \{1, D_1\}, \qquad <D_1> R = \{R, R^5D_1\}, \qquad <D_1> R^2 = \{R^2, R^4D_1\},$$

$$<D_1> R^3 = \{R^3, R^3D_1\}, \qquad <D_1> R^4 = \{R^4, R^2D_1\}, \qquad <D_1> R^5 = \{R^5, RD_1\}.$$

Similmente, tenendo conto dell'indice $[\,\Delta_6 :< R^2 >] = |\Delta_6|/|< R^2 >| = 4$ e della relazione $D_1R = R^5D_1$, le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<R^2>$ sono:

$$<R^2> 1 = \{1, R^2, R^4\}, \qquad <R^2> D_1 = \{D_1, R^2D_1, R^4D_1\},$$

$$<R^2> R^3 = \{R, R^3, R^5\}, \qquad <R^2> R^3D_1 = \{RD_1, R^3D_1, R^5D_1\}.$$

(b) Le classi laterali sinistre di Δ_6 rispetto a $<D_1>$ sono:

$$1 <D_1>= \{1, D_1\}, \qquad R <D_1>= \{R, RD_1\}, \qquad R^2 <D_1>= \{R^2, R^2D_1\},$$

$$R^3 <D_1>= \{R^3, R^3D_1\}, \quad R^4 <D_1> R^4 = \{R^4, R^4D_1\}, \quad R^5 <D_1>= \{R^5, R^5D_1\}.$$

Le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<R^2>$ sono:

$$1 <R^2>= \{1, R^2, R^4\}, \qquad D_1 <R^2>= \{D_1, R^2D_1, R^4D_1\},$$

$$R^3 <R^2>= \{R, R^3, R^5\ \}, \qquad R^3D_1 <R^2>= \{RD_1, R^3D_1, R^5D_1\}.$$

(c) Da quanto visto sopra $R^2 <D_1>\neq<D_1> R^2$.

(d) È un check diretto.

4. Come nel precedente esercizio su Δ_6, se consideriamo il poligono regolare di n lati e ne contiamo i vertici in senso antiorario a partire da P_0 (che supponiamo giacere sull'asse delle ascisse), possiamo osservare che $P_i = P_j$ se e solo se $i \equiv j \pmod{n}$. Ogni elemento di Δ_n si può scrivere nella forma $R^a D_0^b$ con $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \{0, 1\}$: tale scrittura è essenzialmente unica, nel senso che $R^a D_0^b = R^{a'} D_0^{b'}$ se e solo se $a \equiv a' \pmod{n}$ e $b = b'$. Inoltre, vale la formula $R^h D_0 = D_0 R^{(n-1)h}$, per ogni h.

   L'ordine di ogni elemento di Δ_7 deve dividere $|\Delta_7| = 14$, quindi può essere 1, 2, 7, o 14. L'ordine di un elemento è 1 se e solo se l'elemento è l'unità del gruppo. Se esistesse un elemento di ordine 14, allora il gruppo Δ_7 dovrebbe essere ciclico, quindi commutativo. Poiché Δ_7 non è commutativo, i possibili ordini dei suoi elementi sono 2 e 7.

   Per definizione, la rotazione R ha ordine 7, che è un numero primo: segue che $R^h \in <R>$ ha ordine 7 per ogni $h \neq 0$. Si consideri un elemento della forma $R^h D_0$: si ha

$$(R^h D_0)(R^h D_0) = R^h (D_0 R^h) D_0 = R^h R^{(7-1)h} D_0 D_0 = R^{7h} D_0^2 = 1,$$

   quindi tutti gli elementi di $\Delta_7 \setminus <R>$ hanno ordine 2.

   Ragionando come nel caso precedente, i possibili ordini degli elementi di $\Delta_8 \setminus \{1\}$ sono 2, 4, e 8. La rotazione R ha ordine 8: similmente si verifica che R^3, R^5 e R^7 hanno ordine 8.

   Invece risulta $(R^2)^4 = R^8 = 1$ e $(R^6)^4 = R^{24} = 1$, quindi l'ordine di R^2 e R^6 è o 2 o 4: poiché si ha $(R^2)^2(P_0) = R^4(P_0) = P_4 \neq P_0$ il loro ordine è 4. Infine $(R^4)^2 = 1$ e $R^4(P_0) = P_4 \neq P_0$, quindi l'ordine di R^4 è 2.

   Ragionando come nel caso precedente, si verifica infine che tutti gli elementi di $\Delta_8 \setminus <R>$ hanno ordine 2.

5. Usiamo la stessa notazione degli esercizi precedenti: R è la rotazione di $\pi/4$ radianti in senso antiorario e D_0 la riflessione rispetto all'asse delle ascisse, che è uno degli assi di simmetria fissati, e ricordiamo che i 16 elementi del gruppo che stiamo studiando sono

$$\Delta_8 = \{1, R, R^2, R^3, R^4, R^5, R^6, R^7, D_0, D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$$

   che possiamo anche scrivere come

$$\Delta_8 = \{R^a D_0^b \mid a = 0, \ldots, 7 \text{ e } b = 0, 1\},$$

   con le relazioni

$$D_i = R^i D_0, \quad D_0^2 = R^8 = 1 \quad \text{e} \quad D_0 R = R^7 D_0.$$

   (a) Con (molta) pazienza, usiamo le relazioni ricordate sopra per calcolare i vari prodotti tra i

16 elementi di Δ_8:

	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
1	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
R	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	1	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
R^2	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	1	R	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
R^3	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	1	R	R^2	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4
R^4	R^4	R^5	R^6	R^7	1	R	R^2	R^3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3
R^5	R^5	R^6	R^7	1	R	R^2	R^3	R^4	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2
R^6	R^6	R^7	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1
R^7	R^7	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0
D_0	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7
D_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	R^7	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6
D_2	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	R^6	R^7	1	R	R^2	R^3	R^4	R^5
D_3	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	R^5	R^6	R^7	1	R	R^2	R^3	R^4
D_4	D_4	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	R^4	R^5	R^6	R^7	1	R	R^2	R^3
D_5	D_5	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	1	R	R^2
D_6	D_6	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	1	R
D_7	D_7	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	R	R^2	R^3	R^4	R^5	R^6	R^7	1

(b) Per il Teorema di Lagrange, i sottogruppi di Δ_8 possono avere solo ordine 2, 4, o 8. Ogni elemento di Δ_8 genera un sottogruppo ciclico il cui ordine coincide con l'ordine dell'elemento generatore, e questa osservazione caratterizza completamente tutti i sottogruppi di Δ_8 generati da un solo elemento.

In particolare ogni sottogruppo di ordine 2 è di questa forma.

Adesso vi riporto uno studio dettagliato di tutti i sottogruppi non ciclici di Δ_8. È lungo e un po' noioso, ma non spaventatevi troppo, non pretendo che voi sappiate fare questo tipo di considerazioni così dettagliate in sede di esame.

Adesso guardiamo i sottogruppi di ordine 4: supponiamo che $G < \Delta_8$ abbia ordine 4 e non sia ciclico, che equivale a dire che non contiene elementi di ordine 4. Quindi tutti i suoi elementi diversi dall'unità devono avere ordine 2; gli elementi di ordine 2 sono la rotazione R^4 e le 8 riflessioni:

$$R^4, \quad D_0, \quad D_1 = RD_0, \quad D_2 = R^2 D_0, \quad \cdots, \quad D_7 = R^7 D_0.$$

Ogni elemento in G deve coincidere con il suo inverso, perció il prodotto di due elementi distinti non può essere 1: in particolare se $R^a D_0, R^{a'} D_0 \in G$ e $R^a D_0 \neq R^{a'} D_0$, allora

$$R^{a+7a'} = R^a R^{7a'} D_0 D_0 = R^a D_0 R^{a'} D_0 \in G \setminus \{1\}.$$

Quindi sicuramente $R^4 \in G$. Sia $R^a D_0 \in G$: possiamo supporre $0 \leq a \leq 7$. Osserviamo che $R^{4+a} D_0 \neq 1, R^4, R^a D_0$, e da questo segue che

$$G = \{1, R^4, R^a D_0, R^{a+4} D_0\},$$

perché il primo insieme contiene il secondo e entrambi gli insiemi hanno 4 elementi. Si ha $R^{7a} D_0 = D_0 R^a = (R^a D_0)^{-1} \in G$.

Se $R^{7a}D_0 = R^a D_0$, allora $7a \equiv a \pmod 8$, dunque $a \equiv 0 \pmod 4$ (questo tipo di equivalenze di congruenze le vedremo meglio più avanti col Teorema cinese dei resti): in questo caso abbiamo le due possibilità $a = 0$ e $a = 4$. In entrambi i casi deve allora essere

$$G = \{1, R^4, D_0, R^4 D_0\}.$$

La verifica che $\{1, R^4, D_0, R^4 D_0\}$ è effettivamente un sottogruppo di Δ_8 è immediata. Se $R^{7a}D_0 = R^{a+4}D_0$, allora $6a \equiv 4 \pmod 8$, dunque $a \equiv 2 \pmod 4$ (di nuovo, queste congruenze le vedremo meglio): in questo caso abbiamo le due possibilità $a = 2$ e $a = 6$. Si noti che $R^2 D_0 \in G$ se e solo se $R^6 D_0 \in G$, dunque deve essere

$$G = \{1, R^4, R^2 D_0, R^6 D_0\}.$$

Anche in questo caso la verifica che $\{1, R^4, R^2 D_0, R^6 D_0\}$ è un sottogruppo di Δ_8 è immediata.

Passiamo ai sottogruppi di ordine 8: sia $G < \Delta_8$ un sottogruppo di ordine 8 non ciclico. Allora $R, R^3, R^5, R^7 \notin G$ (perché come visto nell'esercizio precedente, il loro ordine è proprio 8), quindi

$$G \leq \{1, R^2, R^4, R^6, D_0, RD_0, R^2 D_0, R^3 D_0, R^4 D_0, R^5 D_0, R^6 D_0, R^7 D_0\}.$$

Concludiamo che esistono in G due elementi della forma $R^a D_0$ e $R^{a'} D_0$, quindi, come già visto nel caso precedente, $R^4 \in G$. Poiché $|G| = 8$, segue che G contiene uno fra D_0, RD_0, $R^2 D_0$, $R^3 D_0$.
Se $RD_0 \in G$, allora anche $R^5 D_0 = R^4 R D_0$, $R^3 D_0 = D_0 R^5 = (R^5 D_0)^{-1}$, $R^7 D_0 = R^4 R^3 D_0$, $R^6 = RR^5 D_0 D_0 = RD_0 R^3 D_0$, $R^2 = (R^6)^3$ sono in G, dunque deve essere

$$G = \{1, R^2, R^4, R^6, RD_0, R^3 D_0, R^5 D_0, R^7 D_0\}.$$

Alla stessa conclusione si arriva se $R^3 D_0 \in G$.
Se $D_0 \in G$, allora anche $R^4 D_0 \in G$. Se $RD_0 \in G$ si avrebbe $R \in G$, dunque $G = \Delta_8$: similmente se $R^3 D_0 \in G$. Se $R^2 D_0 \in G$, allora anche $R^2 = R^2 D_0 D_0$, $R^6 = (R^2)^3$, $R^2 D_0$, $R^6 D_0$ sono in G, dunque deve essere

$$G = \{1, R^2, R^4, R^6, D_0, R^2 D_0, R^4 D_0, R^6 D_0\}.$$

Alla stessa conclusione si arriva se $R^4 D_0 \in G$.

6. Utilizziamo la notazione moltiplicativa sia in G che in H.

   (a) Siano $n = \mathrm{ord}(g)$ e $m = \mathrm{ord}(\varphi(g))$. Allora

   $$1_H = \varphi(1_G) = \varphi(g^n) = \varphi(g)^n,$$

   quindi necessariamente $m|n$.

   (b) Osserviamo che

   $$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = 1_H = \varphi(1_G),$$

   quindi se φ è iniettivo necessariamente $g^m = 1_G$, e quindi $n|m$. Quindi abbiamo due numeri naturali $n, m \in \mathbb{N}$, tali che $n|m$ e, dalla parte (a), $m|n$: segue che $n = m$.

7. In tutti i casi l'unità 1 ha ordine 1.

   Poiché $|\Delta_6| = 12$, gli elementi in $\Delta_6 \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4, 6, 12. Con le notazioni usuali osserviamo che D_i ha ordine 2, R^2 ha ordine 3, R ha ordine 6. Sappiamo che Δ_6 non è commutativo, quindi nemmeno ciclico, e quindi non ci possono essere elementi di ordine 12. Infine non ci possono essere elementi di ordine 4: un tale elemento infatti dovrebbe necessariamente essere della forma R^k, e se fosse di ordine 4 il sottogruppo ciclico da lui generato sarebbe un sottogruppo di ordine 4 di $<R>$ (che ha ordine 6), e questo non è possibile.

   Poiché $|A_4| = 12$, gli elementi in $A_4 \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4, o 6 (non ci possono essere elementi di ordine 12 per lo stesso motivo che per Δ_6). Ricordiamo dall'esercizio 4 del foglio 4 che nel gruppo alterno A_4, oltre all'identità, ci sono:

   - 3 permutazioni di ordine 2: $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, $(1\,4)(2\,3)$ e
   - 8 permutazioni di ordine 3, che sono tutte 3−cicli: $(1\,2)(1\,3)$, $(1\,2)(1\,4)$, $(1\,3)(1\,2)$, $(1\,3)(1\,4)$, $(1\,4)(1\,2)$, $(1\,4)(1\,3)$, $(2\,3)(2\,4)$, $(2\,4)(2\,3)$.

   Poiché $|\Delta_{12}| = 24$, gli elementi in $\Delta_{12} \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Con le notazioni usuali osserviamo che D_i ha ordine 2, R^6 ha ordine 2, R^4 ha ordine 3, R^3 ha ordine 4, R^2 ha ordine 6, R ha ordine 12. Con gli stessi ragionamenti che abbiamo usato per Δ_6, si dimostra che non ci sono elementi di ordine 8 né 24.

   Si ha $|S_4| = 24$, e, di nuovo dall'esercizio 4 del foglio 4, già sappiamo che gli elementi in $S_4 \setminus \{1\}$ possono avere ordine 2, 3, 4. In dettaglio, oltre all'identità e alle permutazioni pari già elencate per A_4, abbiamo:

   - 6 permutazioni di ordine 2: $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(1\,4)$, $(2\,3)$, $(2\,4)$, $(3\,4)$, e
   - 6 permutazioni di ordine 4, che sono tutte 4−cicli: $(1\,2\,3\,4)$, $(1\,2\,4\,3)$, $(1\,3\,4\,2)$, $(1\,3\,2\,4)$, $(1\,4\,3\,2)$, $(1\,4\,2\,3)$.

   Per finire, se G, H sono due gruppi e $\varphi\colon G \to H$ è un isomorfismo, sappiamo dall'esercizio precedente che $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\varphi(g))$ per ogni $g \in G$. In particolare, $\Delta_6 \ncong A_{12}$, perché Δ_6 contiene elementi di ordine 6 e A_4 no, e $\Delta_{12} \ncong S_4$, perché Δ_{12} contiene elementi di ordine 12 e S_4 no.

8. Cominciamo a dimostrare che φ è un omomorfismo: è una conseguenza immediata del fatto che α e β sono omomorfismi e di come è definita l'operazione sul gruppo prodotto $H \times K$. Dati $x, y \in G$, abbiamo che

$$\varphi(xy) = \big(\alpha(xy), \beta(xy)\big) = \big(\alpha(x)\alpha(y), \beta(x)\beta(y)\big) = \big(\alpha(x), \beta(x)\big)\big(\alpha(y), \beta(y)\big).$$

   Ora analizziamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\varphi) &= \{x \in G \mid \varphi(x) = (\alpha(x), \beta(x)) = (1_H, 1_K) = 1_{H\times K}\}\\ &= \{x \in G \mid \alpha(x) = 1_H \text{ e } \beta(x)) = 1_K\}\\ &= \{x \in G \mid x \in \mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)\} = \{1_G\},\end{aligned}$$

   quindi φ è iniettivo.

9. Per mostrare che $H < \mathbb{Q}$ è un sottogruppo usiamo il criterio. Siano $\frac{m}{7^i}$ e $\frac{n}{7^j}$ due elementi di H, allora:
$$\frac{m}{7^i} - \frac{n}{7^j} = \frac{*}{7^{\max\{i,j\}}} \in H.$$
Inoltre, preso un qualsiasi elemento $z \in \mathbb{Z}$, possiamo scrivere $z = \frac{z}{7^0}$, quindi H contiene l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ come sottogruppo.

Per calcolare l'indice $[H : \mathbb{Z}]$ procediamo nel modo seguente. Dato un elemento $h = \frac{m}{7^i} \in H$, abbiamo due casi possibili: o $i = 0$, e allora $h = m \in \mathbb{Z}$, oppure $i = 1$. In questo secondo caso, dividiamo m per 7: per l'algoritmo euclideo, troviamo q e r quoziente e resto tali che $m = 7q + r$, con $0 \leq r < 7$. Allora
$$h = \frac{m}{7} = \frac{7q + r}{7} = q + \frac{r}{7}.$$
Questo significa che l'elemento h appartiene alla classe laterale $\mathbb{Z} + \frac{r}{7}$ per un certo $0 \leq r < 7$. Non solo: tutte le classi laterali di $\mathbb{Z}$ sono fatte in questo modo, e ce ne è una per ogni possibile resto della divisione per 7. In totale quindi le classi laterali di $\mathbb{Z}$ in H sono:
$$\left\{\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \frac{0}{7}, \mathbb{Z} + \frac{1}{7}, \mathbb{Z} + \frac{2}{7}, \mathbb{Z} + \frac{3}{7}, \mathbb{Z} + \frac{4}{7}, \mathbb{Z} + \frac{5}{7}, \mathbb{Z} + \frac{6}{7}\right\},$$
e quindi l'indice che volevamo calcolare è $[H : \mathbb{Z}] = 7$.

10. Osserviamo che l'intersezione $H \cap K$ è un sottogruppo sia di H che di K (e ovviamente di G stesso). Per il Teorema di Lagrange, l'ordine $|H \cap K|$ deve dividere sia $|H|$ che $|K|$, e poiché per ipotesi $|H|$ e $|K|$ sono coprimi, l'unica possibilità è che $|H \cap K| = 1$, e quindi che $H \cap K = \{1_G\}$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!