Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025

Soluzioni foglio 4

1. Le decomposizioni sono:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1\,7\,6)(2\,5\,4), \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,6\,2\,7)(3\,5).$$

Inoltre calcoliamo: $\alpha\beta = (1\,7\,6)(2\,5\,4)(1\,6\,2\,7)(3\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (2\,6\,5\,3\,4)$.

2.
$$\sigma = (3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,7\,2\,4\,6)(3\,5).$$

Gli ordini dei cicli $(1\,7\,2\,4\,6)$ e $(3\,5)$ sono 5 e 2 rispettivamente, quindi $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{mcm}(5, 2) = 10$. Infine:

$$\mathrm{sgn}(1\,7\,2\,4\,6) = \mathrm{sgn}((1\,6)(1\,5)(1\,2)(1\,6)) = (-1)^4 = 1, \quad \mathrm{sgn}(3\,5) = -1, \quad \mathrm{sgn}(\sigma) = 1(-1) = -1.$$

3. (a)
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,6)(2\,7\,4).$$

L'ordine di entrambi i cicli $\gamma_1 = (1\,3\,6)$ e $\gamma_2 = (2\,7\,4)$ è 3, quindi anche $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{mcm}(3, 3) = 3$. Infine: $\mathrm{sgn}(\gamma_1) = \mathrm{sgn}(\gamma_2) = 1$ e quindi anche $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

(b) Osserviamo che l'unico elemento fissato da σ è 5. Sia $\tau = (h\,k) \in S_7$ una trasposizione. Almeno uno tra h e k è diverso da 5, supponiamo (senza perdere in generalità), che sia $h \neq 5$. Sia $a \in I_7$ tale che $h = \sigma(a) \neq a$.

Ora ci sono due possibilità: o $a \neq k$, oppure $a = k$. Nel primo caso quindi $a \neq h, k$ e se applichiamo la composizione $\sigma\tau$ a questo elemento a troviamo: $(\sigma\tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = h$, mentre se applichiamo $\tau\sigma$ troviamo: $(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)) = \tau(h) = k \neq h$.

Nel caso in cui invece valga $a = k$, e quindi la trasposizione τ sia della forma $(h\,a)$ con $\sigma(a) = h$, sia $b = \sigma(h) \neq h$. Osserviamo che allora per come è definita σ necessariamente anche $b \neq a$, e quindi se applichiamo la composizione $\sigma\tau$ all'elemento h troviamo: $(\sigma\tau)(h) = \sigma(\tau(h)) = \sigma(a) = h$, mentre se applichiamo $\tau\sigma$ troviamo: $(\tau\sigma)(h) = \tau(\sigma(h)) = \tau(b) \neq h$.

In totale quindi $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

4. Indichiamo con 1 la permutazione identità.

Il gruppo simmetrico S_2 è formato solo dall'identità e dalla trasposizione $(1\,2)$:

$$S_2 = \{1, (1\,2)\},$$

e si ha che $\mathrm{sgn}(1) = 1$, $\mathrm{sgn}(1\,2) = -1$, $\mathrm{ord}(1) = 1$, $\mathrm{ord}(1\,2) = 2$.

Lo studio di S_3 lo abbiamo già visto a lezione (il 22 ottobre): S_3 ha 6 elementi, che sono, oltre all'identità 1 (di ordine e segno 1), le 3 trasposizioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3),$$

che hanno tutte ordine 2 e segno -1. Infine ci sono i 2 cicli

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2),$$

che hanno ordine 3 e segno 1: $\mathrm{sgn}(1\,2\,3) = \mathrm{sgn}((1\,3)(1\,2)) = 1$ e $\mathrm{sgn}(1\,3\,2) = \mathrm{sgn}((1\,2)(1\,3)) = 1$.

Concludiamo l'esercizio con lo studio di S_4. Per elencare i suoi $4! = 24$ elementi possiamo procedere elencando prima tutte le permutazioni σ per le quali $\sigma(1) = 1$, poi quelle per cui $\sigma(1) = 2$, poi quelle per cui $\sigma(1) = 3$, e infine quelle per cui $\sigma(1) = 4$. In ciascuno di questi casi si può pensare a σ come a una permutazione su 3 elementi.

- Se $\sigma(1) = 1$ abbiamo l'identità 1 e

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\,4), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2\,3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\,4)(2\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\,4)(2\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\,3)(2\,4).$$

- Se $\sigma(1) = 2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,4), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3)(1\,2), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4)(1\,2),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4)(1\,3)(1\,2), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,3)(1\,4)(1\,2).$$

- Se $\sigma(1) = 3$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2)(1\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4)(1\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3)(2\,4),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\,2)(1\,4)(1\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4)(1\,2)(1\,3).$$

- Infine, se $\sigma(1) = 4$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\,2)(1\,4), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,4)(1\,3), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,4)(2\,3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(1\,3)(1\,4), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3)(1\,2)(1\,4).$$

Per ogni permutazione è indicata una possibile scomposizione in trasposizioni: potete verificarne l'uguaglianza e calcolare poi il segno per ogni permutazione, ricordando che se σ si decompone in un prodotto di k permutazioni, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

Per quanto riguarda l'ordine, l'identità ha ordine 1. Ci sono 9 permutazioni di ordine 2:

$$(1\,2), \qquad (1\,3), \qquad (1\,4), \qquad (2\,3), \qquad (2\,4), \qquad (3\,4),$$

$$(1\,2)(3\,4), \qquad (1\,3)(2\,4), \qquad (1\,4)(2\,3).$$

Ci sono 8 permutazioni di ordine 3 che sono tutte 3–cicli:

$$(1\,2)(1\,3), \qquad (1\,2)(1\,4), \qquad (1\,3)(1\,2), \qquad (1\,3)(1\,4),$$

$$(1\,4)(1\,2), \qquad (1\,4)(1\,3), \qquad (2\,3)(2\,4), \qquad (2\,4)(2\,3).$$

Infine ci sono 6 permutazioni di ordine 4 che sono tutte 4–cicli:

$$(1\,4)(1\,3)(1\,2), \qquad (1\,3)(1\,4)(1\,2), \qquad (1\,2)(1\,4)(1\,3),$$

$$(1\,4)(1\,2)(1\,3), \qquad (1\,2)(1\,3)(1\,4), \qquad (1\,3)(1\,2)(1\,4).$$

5. (a) Calcoliamo

$$(1\,2\,3\,4)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3)(2\,4):$$

   quindi $(1\,2\,3\,4)^2$ non è un ciclo.

   (b) Dopo quanto visto nella parte (a), la risposta è ovviamente "falso".

6. Sia $\sigma = (a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_{k-1}\,a_k)$ un ciclo di ordine k. Ricordiamo che $\sigma^k = \sigma^{k-1}\sigma = 1$, e quindi l'inverso $\sigma^{-1} = \sigma^{k-1}$. Inoltre, se $1 \le h \le k$, allora

$$\sigma^h(a_i) = a_{i+h}, \; i = 1, \ldots, k-1, \qquad \sigma^h(a_k) = a_h.$$

In particolare

$$\sigma^{-1}(a_1) = a_k, \qquad \sigma^{-1}(a_i) = a_{i-1}, \; i = 2, \ldots, k,$$

che significa proprio che σ^{-1} è il ciclo $(a_1\,a_k\,a_{k-1}\,\ldots\,a_3\,a_2)$. Chiaramente

7. (a) L'affermazione è banalmente vera se $k = 1$. Sia $k \geq 2$, siano $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$ tutti e soli gli elementi (a due a due distinti) non fissati da σ, e supponiamo che

$$\sigma(a_i) = a_{i+1}, \qquad \sigma(a_k) = a_1.$$

Chiaramente se $1 \leq h \leq k$

$$\sigma^h(a_i) = a_{i+h}, \; i = 1, \dots, k-1, \qquad \sigma^h(a_k) = a_h.$$

Concludiamo che $\sigma^k = 1$ ma $\sigma^h \neq 1$ se $h < k$.

(b) Tenendo conto di quanto visto sopra (e anche di quanto visto nell'esercizio 6, che avrei dovuto probabilmente mettere dopo di questo e non prima...), è chiaro che è vero, $\sigma^{-1} = \sigma^{k-1}$.

(c) Se $\sigma = (a_1\, a_2\, a_3\, \dots\, a_{k-1}\, a_k)$, allora abbiamo visto a lezione che possiamo decomporre

$$\sigma = \prod_{i=1}^{k-1} (a_1\, a_{k-h+1}),$$

quindi $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

8. (a) Siano $\alpha = (1\, a)$, $\beta = (1\, b)$ e $\sigma = (1\, a)(1\, b)(1\, a) = \alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha^{-1}$. Chiaramente σ lascia fissi tutti gli elementi in

$$\{\, \widehat{1}, 2, \dots, a-1, \widehat{a}, a+1, \dots, b-1, \widehat{b}, b+1, \dots, n \,\}$$

(dove quando scrivo $\widehat{i}$ intendo che ho tolto quell'indice).
Invece sugli elementi 1, a, e b σ agisce nel modo seguente:

$$\sigma(1) = \alpha\beta(a) = \alpha(a) = 1, \qquad \sigma(a) = \alpha\beta(1) = \alpha(b) = b, \qquad \sigma(b) = \alpha\beta(b) = \alpha(1) = a.$$

Deduciamo che σ coincide con la trasposizione $(a\, b)$. Vale la pena di osservare che la trasposizione $(a\, b) = (1\, a)(1\, b)(1\, a)$ si può scrivere anche come $(a\, b) = (1\, b)(1\, a)(1\, b)$.

(b) Questa è una conseguenza diretta della parte (a) dell'esercizio insieme al fatto che ogni permutazione si può scrivere come prodotto di trasposizioni: se $\sigma \in S_n$ allora esistono $a_i, b_i \in \{1, \dots, n\}$ con $a_i < b_i$ tali che

$$\sigma = \prod_{i=1}^{h} (a_i\, b_i).$$

Se $a_i = 1$ allora $(a_i\, b_i) = (1\, b_i)$. Se $a_i \neq 1$, per quanto visto sopra,

$$(a_i\, b_i) = (1\, a_i)(1\, b_i)(1\, a_i),$$

come volevamo dimostrare.

(c) Chiamiamo $\gamma = (3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3) \in S_7$ e cominciamo a scomporre γ in trasposizioni:

$$\gamma = (3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3) = (3\,5)(3\,2)(3\,7)(1\,6)(1\,4)(1\,3)(2\,3).$$

Ora sostituiamo ad ogni $(a\,b)$ con $a \neq 1$ la permutazione $(1\,b)(1\,a)(1\,b)$, e otteniamo:

$$\begin{aligned}\gamma &= (1\,5)(1\,3)(1\,5)(1\,2)(1\,3)(1\,2)(1\,7)(1\,3)(1\,7)(1\,6)(1\,4)(1\,3)(1\,3)(1\,2)(1\,3)\\ &= (1\,5)(1\,3)(1\,5)(1\,2)(1\,3)(1\,2)(1\,7)(1\,3)(1\,7)(1\,6)(1\,4)(1\,2)(1\,3).\end{aligned}$$

9. (a) Se $\tau = (b\,c)$, risulta
$$\sigma\tau(a) = \sigma(a) = b \neq c = \tau(b) = \tau\sigma(a),$$
dunque $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

(b) Se per assurdo $Z(S_n) \neq \{1\}$, allora esisterebbe $\sigma \in Z(S_n) \setminus \{1\}$. Poiché $\sigma \neq 1$ esiste $a \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\sigma(a) = b \neq a$. Se $n \geq 3$ esiste $c \notin \{a, b\}$. Per quanto visto sopra esiste $\tau \in S_n$ tale che $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, in contraddizione con l'ipotesi $\sigma \in Z(S_n)$.

(c) Come visto anche nell'esercizio 2, il gruppo simmetrico $S_2 = \{1, (1\,2)\}$ è un gruppo formato da 2 elementi, e quindi è abeliano: l'identità commuta sempre con tutto, e l'unico altro elemento, la trasposizione $(1\,2)$, commuta con se stesso e con l'identità; quindi $Z(S_2) = S_2$. Osserviamo che questo ragionamento si applica a qualsiasi gruppo formato da 2 elementi $G = \{1_G, g\}$: un tale gruppo è sicuramente abeliano.

10. Questo esercizio è molto simile al precedente.

(a) Se $\tau = (b\,c\,d)$, a a, b, c, d sono tutti elementi distinti, abbiamo che

$$\sigma\tau(a) = \sigma(a) = b \neq c = \tau(b) = \tau\sigma(a),$$

dunque $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

(b) Se per assurdo $Z(A_n) \neq \{1\}$, allora esisterebbe $\sigma \in Z(A_n) \setminus \{1\}$. Poiché $\sigma \neq 1$ esiste $a \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\sigma(a) = b \neq a$. Se $n \geq 4$, esistono anche altri due elementi $c, d \notin \{a, b\}$ con $c \neq d$. Per quanto visto sopra esiste $\tau \in A_n$ tale che $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, in contraddizione con l'ipotesi $\sigma \in Z(A_n)$.

(c) Le permutazioni pari di S_3 sono l'identità e i 2 cicli di ordine 3 (di nuovo, si veda l'esercizio 2 per i dettagli): $A_3 = \{1, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$. L'identità 1 commuta con tutti gli altri elementi; inoltre
$$(1\,2\,3)(1\,3\,2) = 1 = (1\,3\,3)(1\,2\,3),$$
cioè anche i 2 cicli di ordine 3 commutano tra loro. Concludiamo che A_3 è abeliano, e quindi $Z(A_3) = A_3$.

11. Ricordiamo che, data una permutazione $\alpha \in S_n$ con decomposizione in prodotto di trasposizioni $\alpha = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k$, si definisce il segno di α come $\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^k$. Quindi abbiamo un'applicazione tra gruppi moltiplicativi

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} : S_n &\to \{+1, -1\} \\ \alpha &\mapsto \operatorname{sgn}(\alpha) \end{aligned}$$

Cominciamo a verificare che l'applicazione segno è un omomorfismo. Sia $\beta \in S_n$ un'altra permutazione, e supponiamo che una sua decomposizione in trasposizioni sia $\beta = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_h$. Allora una decomposizione in trasposizioni della composizione $\alpha\beta$ è $\alpha\beta = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_h$, e quindi

$$\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = (-1)^{k+h} = (-1)^k(-1)^h = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta).$$

La suriettività di questo omomorfismo è ovvia, basta osservare che l'identità ha segno $+1$ e una qualsiasi trasposizione ha segno -1; quindi sgn è un epimorfismo.

Per costruire un omomorfismo iniettivo $\varphi : \{+1, -1\} \hookrightarrow S_n$ possiamo procedere così: necessariamente deve valere $\varphi(+1) = \mathrm{id}$, e per l'iniettività $\varphi(-1) \neq \mathrm{id}$. Sia $\tau \in S_n$ una trasposizione fissata. Verifichiamo che ponendo $\varphi(-1) = \tau$ otteniamo un omomorfismo: infatti $\varphi((-1)\cdot 1) = \varphi(-1) = \tau = \tau \circ \mathrm{id} = \varphi(-1) \circ \varphi(1)$ e viceversa $\varphi(1 \cdot (-1)) = \varphi(-1) = \tau = \mathrm{id} \circ \tau = \varphi(1) \circ \varphi(-1)$, e inoltre $\varphi((-1)\cdot(-1)) = \varphi(1) = \mathrm{id} = \tau \circ \tau = \varphi(-1) \circ \varphi(-1)$ (dove sono stata più precisa del solito, usando una notazione che 1 è l'elemento neutro di $\{+1, -1\}$ e id l'elemento neutro di S_n, $\cdot$ l'operazione di prodotto di $\{+1, -1\}$ e $\circ$ l'operazione di prodotto di S_n). In conclusione, per ogni trasposizione $\tau \in S_n$ esiste un monomorfismo del tipo richiesto.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!