Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025
Soluzioni foglio 2

1. (a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo, e per dimostrarlo usiamo il criterio: se $A, B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, allora $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1} = 1$, quindi $AB^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Anche $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo; di nuovo per il criterio, date $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,
$$(AB^{-1})\,{}^t(AB^{-1}) = A(B^{-1})\,{}^t(B^{-1}){}^tA = A\big(({}^tBB)^{-1}\big)\,{}^tA = A{}^tA = I_n,$$
cioè $AB^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Gli stessi passaggi del punto (b), insieme all'osservazione che le matrici ortogonali speciali hanno tutte determinante $= 1$ (dal corso di Algebra Lineare), ci garantisce che anche $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo.

   (d) $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ non è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: si vede immediatamente che non è stabile, infatti se $A, B \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det(A)\det(B) > 0$, cioè $AB \notin \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Inoltre non contiene l'identità I_n, che ha determinante positivo.

   (e) $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) < \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è un sottogruppo: anche per lui possiamo usare il criterio per dimostrarlo. Date $A, B \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ allora $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1} > 0$, quindi AB^{-1} è ancora un elemento di $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

   (f) $\mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R})$ non è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: ad esempio, non contiene gli inversi dei suoi elementi, perché data una matrice $A \in \mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R})$ con $\det(A) > 1$, si ha che $A^{-1} \notin \mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R})$, perché ovviamente $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} < 1$.

   (g) Infine, le matrici simmetriche non sono un sottogruppo, perché non sono chiuse rispetto al prodotto. Ad esempio, in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}).$$

2. (a) Sia $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $x \mapsto e^x$. Dal corso di Analisi I sappiamo che
$$\varphi(x_1 + x_2) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1}e^{x_2} = \varphi(x_1)\varphi(x_2).$$
Deduciamo che φ è un omomorfismo. L'applicazione è iniettiva: se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che $e^{x_1} = e^{x_2}$ allora $e^{x_1 - x_2} = 1$, e questa equazione ha come unica soluzione $x_1 - x_2 = 0$, cioè $x_1 = x_2$. L'applicazione non è suriettiva: $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $\mathrm{Im}(\varphi) = (0, +\infty)$.

   (b) Sia $\psi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto \log|x|$, e sia α sia la base del logaritmo. L'applicazione non è iniettiva, poiché $\psi(x) = \psi(-x)$. L'applicazione è suriettiva, poiché l'equazione $\log|x| = y$ ha come soluzioni $x = \pm\alpha^y$. Di nuovo da Analisi I sappiamo che
$$\psi(x_1x_2) = \log|x_1x_2| = \log|x_1| \cdot |x_2| = \log|x_1| + \log|x_2| = \psi(x_1) + \psi(x_2),$$
quindi ψ è un omomorfismo.

(c) Per i numeri complessi, l'applicazione $z = a + ib \mapsto \overline{z} = a - ib$ è detta "coniugio" (da non confondersi col coniugio degli esercizi 6 e 7!). Essa è un omomorfismo di gruppi additivi: dati $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$ abbiamo che

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Il coniugio è iniettivo (se $\overline{z_1} = a_1 - ib_1 = a_2 - ib_2 = \overline{z_2}$ allora banalmente $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$), e anche suriettivo, in quanto $a + ib = \overline{a + i(-b)}$.

(d) Il coniugio è un omomorfismo anche come mappa di gruppi moltiplicativi:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.\end{aligned}$$

Ovviamente, per la biettività rimane valido quanto visto nella parte (c).

(e) Per i numeri complessi, la notazione $|z|$ si riferisce al "modulo" del numero complesso; se $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'applicazione $f : z \mapsto |z|^3$ non è un omomorfismo di gruppi additivi: è immediato controllare che $|z_1 + z_2|^3 \neq |z_1|^3 + |z_2|^3$. Inoltre f non è né iniettiva ($|1|^3 = |i|^3$ ma ovviamente $1 \neq i$) né suriettiva ($\mathrm{Im}(f) \subseteq (0, +\infty)$).

(f) Le mancate iniettività e suriettività dell'applicazione $f : z \mapsto |z|^3$ rimangono valide dalla parte (e). Vista come mappa di gruppi moltiplicativi però l'applicazione f è un omomorfismo, perché lo è il modulo: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(g) L'applicazione determinante non è iniettiva (chiaramente $\det(A) = \det(B) \not\Rightarrow A = B$), ma è suriettiva. Come conseguenza immediata del Teorema di Binet (che avete imparato ad Algebra Lineare), il determinante è un omomorfismo: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ per ogni $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(h) Come per il determinante, la traccia non è iniettiva (chiaramente $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) \not\Rightarrow A = B$), ma è suriettiva. Al contrario però del determinante, la traccia non è un omomorfismo: ad esempio

$$\mathrm{tr}\,\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = 0 \neq 2 = \mathrm{tr}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \mathrm{tr}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

Osserviamo che i ragionamenti fatti per le parti (g) ed (h) dell'esercizio valgono per qualsiasi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, non solo per $n = 2$.

(i) Sia $\chi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$, $a + bi \mapsto \begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}$. È facile verificare che

$$\begin{aligned}\chi((a + ib)(c + id)) = \chi(ac - bd + i(ad + bc)) &= \begin{pmatrix}ac - bd & -ad - bc\\ad + bc & ac - bd\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\d & c\end{pmatrix} = \chi(a + ib)\chi(c + id).\end{aligned}$$

Deduciamo che χ è un omomorfismo. Chiaramente non è suriettiva poiché ad esempio $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(\chi)$, però è iniettiva: Infine

$$\chi(a + ib) = \chi(c + id) \Rightarrow \begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c & -d\\d & c\end{pmatrix} \Rightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

3. L'applicazione $\varphi : H \times K \to G$ definita da $(h,k) \mapsto hk$ è un omomorfismo, ovviamente se consideriamo su $H \times K$ la struttura di gruppo prodotto cartesiano. Infatti, dati $(h,k), (\alpha,\beta) \in H \times K$, si ha che

$$\varphi((h,k)(\alpha,\beta)) = \varphi(h\alpha, k\beta) = (h\alpha)(k\beta) = h(\alpha k)\beta = h(k\alpha)\beta = (hk)(\alpha\beta) = \varphi(h,k)\varphi(\alpha,\beta),$$

dove nella catena di uguaglianze abbiamo sfruttato l'associatività del prodotto e la proprietà (b) dei sottogruppi H e K. Supponiamo ora che $(h,k), (\alpha,\beta) \in H \times K$ siano tali che $hk = \varphi(h,k) = \varphi(\alpha,\beta) = \alpha\beta$. L'uguaglianza $hk = \alpha\beta$ è equivalente a $\alpha^{-1}h = \beta k^{-1}$, che significa che l'elemento $\alpha^{-1}h = \beta k^{-1}$ è sia elemento di H che di K; per la proprietà (a), necessariamente $\alpha^{-1}h = \beta k^{-1} = 1_G$, e quindi $\alpha = h$ e $\beta = k$, cioè φ è iniettiva. Infine, la proprietà (c) implica banalmente che φ è suriettiva, e quindi che è un isomorfismo.

4. Se vale l'uguaglianza $ab = ba$, allora: $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = baa^{-1}b^{-1} = 1$. Viceversa, se il commutatore di due elementi $[a,b] = 1$, allora: $ab = aba^{-1}b^{-1}ba = [a,b]ba = ba$.

5. (a) Ricordiamo che una relazione è d'equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva. Chiaramente $1 \cdot a \cdot 1^{-1} = a$, quindi il coniugio è riflessivo. Inoltre $gag^{-1} = b$ se e solo se $hbb^{-1} = a$ dove $h = g^{-1}$, quindi il coniugio è simmetrico. Infine, se $gag^{-1} = b$ e $hbh^{-1} = c$, segue che

$$(hg)a(hg)^{-1} = hgag^{-1}h^{-1} = c,$$

quindi il coniugio è anche transitivo.

   (b) L'implicazione G abeliano $\Rightarrow$ il coniugio coincide con l'uguaglianza è ovvia. Viceversa, supponiamo che il coniugio coincida con l'uguaglianza in G. Siano $a, b \in G$: allora $x = bab^{-1}$ è coniugato ad a, quindi $x = a$: pertanto $a = bab^{-1}$ o, equivalentemente, $ab = ba$, cioè a e b commutano.

6. Cominciamo a mostrare che il coniugio è un omomorfismo: dati $x, y \in G$

$$\varphi_g(xy) = g(xy)g^{-1} = g(x1_G y)g^{-1} = g(x(g^{-1}g)y)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \varphi_g(x)\varphi_g(y).$$

Con $Z(G)$ si denota il centro del gruppo, ovvero l'insieme di tutti gli elementi che commutano in G (si veda l'esercizio 9). Un elemento del gruppo $g \in Z(G)$ se e solo se $xg = gx$ per ogni $x \in G$, e questo accade se e solo se $x = gxg^{-1}$ per ogni $x \in G$, se e solo se $x = \varphi_g(x)$ per ogni $x \in G$, se e solo se il coniugio φ_g coincide con l'applicazione identità.

7. In $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, se consideriamo le due matrici

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

abbiamo che $ax = b$ e $xa = b$ hanno rispettivamente soluzione

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. (a) Se $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$, $\forall\, a \in G$: $a^{-1} = a$. Quindi G è abeliano perché
$$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba.$$
Osserviamo anche che il viceversa è chiaramente falso, basti pensare a quanti gruppi abeliani abbiamo già incontrato dove certamente non vale la proprietà $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$.

(b) Supponiamo che $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$. Applicando tale relazione ai due elementi a^{-1} e b^{-1} di G e tenendo conto che $a = (a^{-1})^{-1}$ e $b = (b^{-1})^{-1}$ segue
$$ab = (a^{-1}b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1} = ba,$$
per ogni $a, b \in G$, cioè G è abeliano.

(c) Se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano perché:
$$ab = a^{-1}(a^2b^2)b^{-1} = a^{-1}(ab)^2b^{-1} = a^{-1}(abab)b^{-1} = ba.$$

9. (a) Chiaramente $1_G \in Z(G)$, perché $1_g g = g = g 1_g$ per ogni $g \in G$. Se $x, y \in Z(G)$ e $g \in G$ allora:
$$g(xy) = (gx)y = (xg)y = x(gy) = x(yg) = (xy)g,$$
cioè $xy \in Z(G)$. Infine, se $x \in Z(G)$ e $g \in G$ allora:
$$g^{-1}x = xg^{-1} \quad \Rightarrow \quad (g^{-1}x)^{-1} = (xg^{-1})^{-1} \quad \Rightarrow \quad x^{-1}g = gx^{-1},$$
cioè $x^{-1} \in Z(G)$.

(b) Questa è quasi una tautologia: G è abeliano se e solo se $xy = yx$ per ogni $x, y \in G$ se e solo se $G = Z(G)$.

(c) Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. La condizione $AB = BA$ applicata alle matrici diagonali della forma $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ implica che
$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \beta a_{12} \\ \alpha a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{pmatrix}$$
per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$. Quindi deve valere $\alpha a_{12} = \beta a_{12}$ e $\beta a_{21} = \alpha a_{21}$ per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, da cui deduciamo $a_{12} = a_{21} = 0$: quindi le matrici $A \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ devono necessariamente avere la forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. Per capire la forma delle entrate a_{11} e a_{22}, imponiamo la commutatività con le matrici "antidiagonali" della forma $C = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$:
$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma a_{11} \\ \delta a_{22} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma a_{22} \\ \delta a_{11} & 0 \end{pmatrix}$$
per ogni scelta di $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^*$. Allora deve valere $\gamma a_{11} = \gamma a_{22}$ per ogni scelta di $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^*$, e quindi $a_{11} = a_{22}$. In totale, se $A \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$, allora $A = \lambda I_2$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$. D'altra parte, un conto diretto mostra che ogni matrice del tipo λI_2 commuta con ogni altra matrice di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, e quindi l'insieme di tali matrici è contenuto nel centro. In totale quindi:
$$Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}.$$

10. Dati due elementi $g, h \in G$, $\varphi(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = \varphi(h)\varphi(g)$, quindi $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ se e solo se $\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g)\varphi(h)$ per ogni coppia $g, h \in G$, cioè se e solo se G è abeliano. Per la seconda parte, si noti che

$$\varphi^2(g) = \varphi(g^{-1}) = (g^{-1})^{-1} = g = \mathrm{id}(g),$$

dunque φ è biettivo.

11. (a) Usiamo il criterio per sottogruppi per mostrare che le matrici triangolari inferiori

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

sono un sottogruppo di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (la stessa dimostrazione si applica poi alle triangolari superiori, con le ovvie variazioni). Siano $A, B \in L$; calcoliamo

$$AB^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{22} & 0 \\ a_{21}b_{22} - a_{22}b_{21} & a_{22}b_{11} \end{pmatrix} \in L,$$

cioè L è un sottogruppo.

(b) Si ha

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} & b_{11}c_{12} \\ b_{21}c_{11} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{pmatrix}.$$

quindi gli elementi in LU devono sicuramente avere l'entrata in posizione $(1, 1)$ diversa da 0. Verifichiamo che tale condizione necessaria è anche sufficiente utilizzando l'interpretazione matriciale delle operazioni elementari di riga: si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{pmatrix}.$$

(c) In virtù di quanto visto sopra, la domanda (c) è equivalente a domandarsi se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si può scrivere come prodotto di matrici triangolari. Evidentemente non ci si può aspettare che $A = BC$ con $B \in L$ e $C \in U$. Utilizzando lo stesso ragionamento della parte (b), si verifichi che $A = BC$ per qualche $B \in U$ e $C \in L$.

(d) Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in U$$

soddisfano $AB \neq BA$ (la verifica è un conto immediato).

12. Dato un gruppo G, il suo insieme degli automorfismi è

$$\mathrm{Aut}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ è un isomorfismo}\}.$$

Consideriamo la coppia $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$, dove $\circ$ è l'usuale composizione di funzioni, che già sappiamo essere associativa. L'elemento neutro è l'applicazione identità $id_G : G \to G$, che manda qualsiasi elemento $g \in G$ in se stesso. Inoltre, per ogni $f \in \mathrm{Aut}(G)$ sappiamo che esiste l'applicazione inversa, cioè $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_G$. Concludiamo quindi che $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ è un gruppo.

13. Utilizziamo la notazione moltiplicativa sia in G che in H, e usiamo il criterio per sottogruppi. Siano $g, h \in K$: poiché φ e ψ sono omomorfismi di gruppi moltiplicativi

$$\varphi(gh^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = \psi(g)\psi(h)^{-1} = \psi(g)\psi(h^{-1}) = \psi(gh^{-1}),$$

cioè $gh^{-1} \in K$, e quindi K è un sottogruppo di G

14. (a) Cominciamo a mostrare che l'operazione è ben definita: siano $\sigma_{a,b}$ e $\sigma_{c,d}$ due elementi di G, allora l'applicazione composta $\sigma_{a,b} \circ \sigma_{c,d} : \mathbb{R} \to R$ è definita da

$$(\sigma_{a,b} \circ \sigma_{c,d})(x) = \sigma_{a,b}(\sigma_{c,d}(x)) = \sigma_{a,b}(cx+d) = a(cx+d)+b = (ac)x+(ad+b) = \sigma_{ac,ad+b}(x),$$

quindi è ancora un elemento di G. Sappiamo che l'applicazione di composizioni è associativa, quindi perché G sia un gruppo basta esibire l'elemento neutro e gli inversi. L'elemento neutro è l'applicazione identità $x \mapsto x = 1x + 0$, che quindi è l'elemento $\sigma_{1,0} \in G$. Infine, è immediato verificare che per ogni a, b con $a \neq 0$, la composizione $\sigma_{a,b} \circ \sigma_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$ dà l'indentità, e quindi $\sigma_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} = \sigma_{a,b}^{-1}$.

(b) Usando il criterio per sottogruppi, siano $\sigma_{1,b}, \sigma_{1,d} \in T$. Calcoliamo

$$(\sigma_{1,b} \circ \sigma_{1,d}^{-1})(x) = \sigma_{1,b}(\sigma_{1,d}^{-1}(x)) = \sigma_{1,b}(\sigma_{1,-d}(x)) = \sigma_{1,b}(x-d) = x - d + b = \sigma_{1,b-d}(x),$$

quindi $\sigma_{1,b} \circ \sigma_{1,d}^{-1} = \sigma_{1,b-d} \in T$, e T è un sottogruppo.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!