Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025

Esercizi, foglio 8

1. Dimostrare che l'insieme di matrici
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
è un sottoanello commutativo dell'anello $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici quadrate di ordine due a coefficienti reali. Dimostrare poi che
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$
è un ideale massimale di A.

2. Sia A un anello commutativo con unità e siano P, Q ideali primi di A. Provare che l'intersezione $P \cap Q$ è un ideale primo di A se e solo se $P \subseteq Q$ oppure $P \supseteq Q$.

3. Sia A un anello commutativo con unità e sia I un suo ideale. Ricordiamo (dall'esercizio 10 del foglio 6) che il radicale di I è l'ideale
$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \in I\}.$$
   (a) Verificare che $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
   (b) Dimostrare che se I è un ideale primo, allora $\sqrt{I} = I$.

4. Sia A un PID (un anello commutativo con unità a ideali principali), e sia $I \neq (0_A)$ un ideale di A. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se è un ideale massimale.

5. Calcolare quoziente e resto della divisione di $a(x)$ per $b(x)$ per ciascuna delle seguenti coppie $(a(x), b(x))$ di polinomi.
$$(x^3 - x^2 + 5x,\ x^2 - x), \qquad (x^3 + x^2 + x + 1,\ x^2), \qquad (x^4 + x^2,\ x + 1),$$
$$(x^3 + x^2,\ x^2 + 1), \qquad (x^5 - 1,\ x^3 - 1).$$

6. (a) Mostrare che $x^4 + n - 1$ è riducibile in $\mathbb{Z}_n[x]$ per ogni $n \geq 1$.
   (b) Mostrare che se $n - 1 \geq 0$ non è un quadrato, $x^4 + n - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$.
   (c) Esiste $n \geq 1$ tale che $x^4 + n - 1$ sia irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$, ma $n - 1$ sia un quadrato?

7. Si consideri $p(x) = x^4 + 2x + 4 \in \mathbb{Z}[x]$. Verificare che $p(x)$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Eisenstein, ma è comunque irriducibile su $\mathbb{Z}[x]$.

8. Si consideri $p(x) = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Dimostrare che $p(x)$ è riducibile e verificare che I non è né massimale, né primo.
   (b) Determinare due ideali distinti J' e J'' contenenti I e tali che $J' + J'' = \mathbb{Q}[x]$.
   (c) Calcolare gli zero–divisori di $\mathbb{Q}[x]/I$.
   (d) Descrivere gli elementi $\overline{q(x)} \in \mathbb{Q}[x]/I$ tali che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$.

9. Si consideri $p(x) = (x + 3)^2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
   (a) Dimostrare che I non è né massimale, né primo.
   (b) Calcolare un generatore di $\sqrt{I}$: dedurre che $I \neq \sqrt{I}$.
   (c) Determinare un ideale massimale contenente I.
   (d) Stabilire se esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Q}[x]/I$ non nullo e tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{1}$.
   (e) Stabilire se esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Q}[x]/I$ non nullo e tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$.
   (f) Verificare se $\overline{x} \in \mathbb{Q}[x]/I$ è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

10. In $\mathbb{Z}[x]$ si consideri l'ideale $I = (2, x)$.
    (a) Verificare che $1 \notin I$.
    (b) Dimostrare che $\mathbb{Z}[x]$ non è un dominio a ideali principali.
    (c) Sia $q(x) \notin I$: mostrare che $\overline{q(x)} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}[x]/I$.
    (d) È vero o falso che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/I$ è un campo?

11. Si consideri $p(x) = x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
    (a) Stabilire se il polinomio $p(x)$ è irriducibile, e verificare poi che è un elemento di $(2, x)$.
    (b) Stabilire se I è massimale.
    (c) Dire se è vero o falso che esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tale che $\overline{q(x)}^2 + \overline{1} = \overline{0}$?
    (d) Determinare tutti gli elementi $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tali che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$.

12. Si consideri $p(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$.
    (a) Verificare che I non è massimale e determinare un ideale massimale contenente I.
    (b) Verificare che $\overline{3} \in \mathbb{Z}[x]/I$ non è invertibile.

13. Si consideri $p(x) = x^2 - 5 \in \mathbb{Z}[x]$ e sia $I = (p(x))$.

   (a) Dimostrare che I non è massimale e determinare un ideale massimale contenente I.
   (b) Stabilire se esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}[x]/I$ tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{1}$.
   (c) Verificare se $\overline{3x-1} \in \mathbb{Z}[x]/I$ è invertibile e, in caso affermativo, determinarne l'inverso.

14. Sia $p(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $I = (p(x))$.

   (a) Verificare che $I \subseteq \mathbb{Q}[x]$ è massimale.
   (b) Calcolare la caratteristica di $\mathbb{Q}[x]/I$.
   (c) Mostrare che in ogni classe di $\mathbb{Q}[x]/I$ non nulla esiste esattamente un solo polinomio di grado al più 3.
   (d) Dimostrare che non esistono radici quadrate di -1 in $\mathbb{Q}[x]/I$.

15. Si consideri $p_n(x) = x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{n} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

   (a) Determinare i valori di $n \in \mathbb{Z}$ per cui $p_n(x)$ ha radici in $\mathbb{Z}_3$, calcolandole in ciascun caso.
   (b) Stabilire se $\mathbb{Z}_3[x]/(p_2(x))$ è un campo.
   (c) Determinare l'inverso di $\overline{x}$ in $\mathbb{Z}_3[x]/(p_1(x))$.

16. Si consideri $p(x) = x^3 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$ e sia $I = (p(x))$.

   (a) Dimostrare che $p(x)$ è irriducibile e mostrare che $\mathbb{Z}_3[x]/I$ è un campo.
   (b) Determinare la caratteristica e la cardinalità di $\mathbb{Z}_3[x]/I$.
   (c) Esiste $\overline{q(x)} \in \mathbb{Z}_3[x]/I$ non nullo e tale che $\overline{q(x)}^2 = \overline{0}$?

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!