

Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, 2024-2025  
**Esercizi, foglio 7**

1. Calcolare il massimo comune divisore delle seguenti coppie di numeri tramite l'algoritmo d'Euclide, e poi esprimerlo come combinazione lineare dei due interi.

$$(707, 1991), \quad (3937, 3441), \quad (5407, 6077), \quad (14351, 14803).$$

2. (a) Dimostrare che  $p \in \mathbb{N}$  è primo se e solo se non ha divisori  $d$  tali che  $1 < d \leq \sqrt{p}$ .  
(b) Stabilire quale fra i seguenti numeri è primo: 431, 433, 435, 437.

3. Siano  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Dimostrare che se  $\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(a, c) = 1$ , allora  $\text{MCD}(a, bc) = 1$ .

4. In  $\mathbb{Z}$  si considerino i numeri non negativi  $n$  e  $m$ .

- (a) Verificare che  $(n) + (m) = \text{MCD}(n, m)\mathbb{Z}$ .  
(b) Verificare che  $(n) \cap (m) = \text{mcm}(n, m)\mathbb{Z}$ .

5. Dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze fra sottogruppi del gruppo additivo  $\mathbb{Z}$ :

$$n\mathbb{Z} \vee m\mathbb{Z} = \text{MCD}(n, m)\mathbb{Z}, \quad n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \text{mcm}(n, m)\mathbb{Z}.$$

6. Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

- (a) Dimostrare che se  $d = \text{MCD}(a, b)$  allora  $\frac{a}{d}$  e  $\frac{b}{d}$  sono coprimi.  
(b) Dimostrare che per ogni  $c \in \mathbb{Z}$  risulta  $\text{MCD}(ac, bc) = |c| \text{MCD}(a, b)$ .

7. Siano  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Dimostrare che se  $\text{MCD}(a, 4) = \text{MCD}(b, 4) = 2$ , allora  $\text{MCD}(a + b, 4) = 4$ .

8. Siano  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tre interi tali che  $\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(a, c)$ . Mostrare che  $\text{MCD}(a, b) = \text{MCD}(a, b, c)$ .

9. Determinare la tavola di addizione e moltiplicazione di  $\mathbb{Z}_9$ . Elencare gli elementi del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}_9^*$  calcolandone l'ordine: stabilire se il gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}_9^*$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_6$ , a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ , a  $D_3$ , o a  $A_3$ .

10. Determinare la tavola di addizione e moltiplicazione di  $\mathbb{Z}_8$ . Elencare gli elementi del gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}_8^*$  calcolandone l'ordine: stabilire se il gruppo moltiplicativo  $\mathbb{Z}_8^*$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_4$  e/o a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

11. Siano dati  $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_5$  e  $H = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10}$ .

- (a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi  $G$  e  $H$ ?  
(b) Esiste un isomorfismo dei gruppi moltiplicativi  $G^*$  e  $H^*$ ?

12. Siano dati  $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$  e  $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$ .

(a) Esiste un isomorfismo dei gruppi additivi  $G$  e  $H$ ?

(b) Esiste un isomorfismo dei gruppi moltiplicativi  $G^*$  e  $H^*$ ?

13. Determinare i gruppi di automorfismi  $\text{Aut}(\mathbb{Z})$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4)$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_5)$ .

**N.B.** Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!