Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025
Esercizi, foglio 6

1. Sia A un anello, X un insieme non vuoto. Se $\varphi, \psi \in A^X$, definiamo come sempre:
$$\begin{aligned}\varphi + \psi \colon X &\to A \\ x &\mapsto \varphi(x) + \psi(x),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\varphi\psi \colon X &\to A \\ x &\mapsto \varphi(x)\psi(x).\end{aligned}$$
   (a) Verificare che A^X con tali operazioni è un anello.
   (b) Dimostrare che A^X è commutativo se e solo se A è commutativo.
   (c) Dimostrare che A^X è unitario se e solo se A è unitario.

2. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto.
   (a) Determinare gli elementi invertibili dell'anello A^X definito nell'esercizio precedente.
   (b) È vero o falso che A^X è un corpo se e solo se A è un corpo?
   (c) È vero o falso che A^X contiene sempre divisori di zero (non nulli)?

3. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$.
   (a) Sia $a \in A$: è vero o falso che se $ab = b$ per ogni $b \in A$ allora $a = 1_A$?
   (b) Sia $a \in A$ invertibile: dimostrare che il suo inverso moltiplicativo, se esiste, è unico.

4. Sia $\mathbb{R}^{2,2}$ l'insieme delle matrici quadrate d'ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Stabilire quale dei seguenti insiemi ne è un sottoanello, un sottoanello unitario, un sottoanello commutativo, un sottogruppo additivo ma non un sottoanello.
   (a) $L = \{ (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{12} = 0 \}$.
   (b) $A = \{ (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} = a_{22} = 0 \}$.
   (c) $B = \{ (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{11} = a_{22} = a_{21} = 0 \}$.
   (d) $C = \{ (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a_{12} = a_{22} = a_{21} = 0 \}$.

5. Sia A un anello. Dimostrare che il *centro* di A:
$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ per ogni } b \in A\}$$
   è un sottoanello di A.

6. Sia A un anello con $1_A \neq 0_A$, X un insieme non vuoto. Per ogni $x \in X$ fissato siano

$$I_x = \{\varphi \in A^X \mid \varphi(x) = 0_A\}, \qquad J_x = \{\varphi \in A^X \mid \varphi(x) = 1_A\}.$$

   (a) Dimostrare che I_x è un ideale proprio in A^X.
   (b) Stabilire se J_x è un ideale.
   (c) Siano $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$: dimostrare che $I_{x'} + I_{x''}$ contiene l'unità di A^X.

7. Sia G un gruppo abeliano. Se $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(G)$ si definisca l'applicazione somma $\varphi + \psi \colon G \to G$ tale che $g \mapsto \varphi(g) + \psi(g)$. Si ponga poi $\varphi\psi = \varphi \circ \psi$.

   (a) Dimostrare che l'insieme $\mathrm{End}(G)$ con queste due operazioni è un anello unitario.
   (b) È vero o falso che $\mathrm{End}(G)$ è commutativo?
   (c) Sia $I = \{\varphi \in \mathrm{End}(G) \mid \text{se } g \text{ ha ordine finito allora } \varphi(g) = 0_G\}$: verificare che I è un ideale bilatero di $\mathrm{End}(G)$.

8. Sia A un anello con $0_A \neq 1_A$. Si supponga che l'applicazione $\varphi \colon A \to A$ definita da $\varphi(a) = a^2$ sia un omomorfismo di anelli.

   (a) Dimostrare che A è un anello commutativo di caratteristica 2.
   (b) Verificare che se $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ allora $1_A + a$ è invertibile.
   (c) Dare un esempio di un anello A in cui l'applicazione φ sopra sia un omomorfismo.

9. Siano A e B due anelli unitari. Per ogni coppia $(a, b), (a', b') \in A \times B$ poniamo:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \qquad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

   (a) Dimostrare che $A \times B$ con tali operazioni è un anello.
   (b) Verificare che $A \times B$ è commutativo se e solo se sia A che B lo sono.
   (c) Consideriamo le applicazioni

$$\begin{aligned} i_A \colon A &\to A \times B \\ a &\mapsto (a, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A \colon A \times B &\to A \\ (a, b) &\mapsto a. \end{aligned}$$

   Definiamo poi in maniera simile $i_B \colon B \to A \times B$ e $p_B \colon A \times B \to B$.
   Stabilire quali fra i_A, i_B, p_A, p_B sono omomorfismi d'anelli.

   (d) Verificare che $\mathrm{Im}(i_A)$ e $\mathrm{Im}(i_B)$ sono ideali di $A \times B$, generati rispettivamente da $(1_A, 0)$ e $(0, 1_B)$.

10. Sia A un anello commutativo con unità e I un suo ideale. Il *radicale* di I è

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid \text{esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } a^n \in I\}.$$

   (a) Verificare che $I \subseteq \sqrt{I}$.
   (b) Dimostrare che se $a \in \sqrt{I}$ allora esiste $N \in \mathbb{Z}$ tale che $a^m \in I$ per ogni $m \geq N$.
   (c) Verificare che se $a, b \in \sqrt{I}$ allora anche $-a$ e $a + b$ sono in $\sqrt{I}$.
   (d) Dedurre che $\sqrt{I}$ è un ideale.

11. Siano A e B due anelli unitari.

   (a) Siano $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$ ideali: dimostrare che $I \times J \subseteq A \times B$ è un ideale.
   (b) Sia $H \subseteq A \times B$ un ideale: dimostrare che $I = p_A(H) \subseteq A$ e $J = p_B(H) \subseteq B$ sono ideali.
   (c) Verificare che $p_A^{-1}(I) \cap p_B^{-1}(J) \subseteq A \times B$ è un ideale contenente H.
   (d) Dimostrare che se $(a, b) \in p_A^{-1}(I) \cap p_B^{-1}(J)$, allora esistono $a' \in A$ e $b' \in B$ tali che $(a, b'), (a', b) \in H$: calcolare $(1_A, 0)(a, b')$ e $(0, 1_B)(a', b)$.
   (e) Mostrare che $p_A^{-1}(I) \cap p_B^{-1}(J) \subseteq H$.
   (f) Dedurre che $H \subseteq A \times B$ è un ideale se e solo se esistono ideali $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$ tali che $H = I \times J$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!