Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025
Esercizi, foglio 5

1. Siano G e H due gruppi ciclici con generatori g e h rispettivamente. Sia $\mathrm{Hom}(G, H)$ l'insieme degli omomorfismi da G in H.
   (a) Stabilire se $\mathrm{Hom}(G, H)$ è un sottogruppo di H^G.
   (b) Descrivere ogni $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ calcolando $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (c) Caratterizzare, quando esistono, gli isomorfismi in $\mathrm{Hom}(G, H)$.

2. Siano G e H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$.
   (a) Dimostrare che se φ è iniettivo e H è ciclico, allora anche G lo è.
   (b) Dimostrare che se φ è suriettivo e G è ciclico, allora anche H lo è.

3. Si consideri il gruppo diedrale Δ_6, $R \in \Delta_6$ la rotazione di $\pi/3$ radianti in senso antiorario e D_i la riflessione rispetto all'asse di simmetria passante per il vertice P_i dell'esagono.
   (a) Determinare tutte le classi laterali destre di Δ_6 rispetto a $<D_i>$ e rispetto a $<R^2>$.
   (b) Determinare tutte le classi laterali sinistre di Δ_6 rispetto a $<D_i>$ e rispetto a $<R^2>$.
   (c) Determinare un elemento $g \in \Delta_6$ tale che $g <D_i> \neq <D_i> g$.
   (d) Verificare che per ogni elemento $g \in \Delta_6$ risulta $g <R^2> = <R^2> g$.

4. Si consideri il gruppo diedrale Δ_n e siano $R, D_i \in \Delta_n$ la rotazione di $2\pi/n$ radianti in senso antiorario e la riflessione rispetto all'asse di simmetria per il vertice P_i rispettivamente. Calcolare l'ordine di ogni elemento di Δ_7 e Δ_8.

5. Si consideri il gruppo diedrale Δ_8 e siano $R, D_i \in \Delta_8$ la rotazione di $\pi/4$ radianti in senso antiorario e la riflessione rispetto all'i-esimo asse di simmetria rispettivamente.
   (a) Scrivere la tavola di moltiplicazione di Δ_8;
   (b) calcolare tutti i sottogruppi di Δ_8.

6. Siano G e H gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ un omomorfismo.
   (a) Dimostrare che se $g \in G$ allora $\mathrm{ord}(\varphi(g)) \mid \mathrm{ord}(g)$.
   (b) Dimostrare che se φ è iniettivo, allora $\mathrm{ord}(\varphi(g)) = \mathrm{ord}(g)$

7. Calcolare gli ordini di tutti gli elementi di Δ_6, A_4, Δ_{12}, S_4 e verificare che $\Delta_6 \ncong A_4$ e $\Delta_{12} \ncong S_4$.

8. Siano G, H, K tre gruppi, e siano $\alpha : G \to H$, $\beta : G \to K$ due due omomorfismi tali che $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta) = \{1_G\}$. Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to H \times K \\ x &\mapsto (\alpha(x), \beta(x)) \end{aligned}$$

è un monomorfismo.

9. Sia
$$H = \left\{ \frac{m}{7^i} \mid m \in \mathbb{Z}, i = 0, 1 \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$
Dimostrare che H è un sottogruppo del gruppo additivo $(\mathbb{Q}, +)$, e che contiene $\mathbb{Z}$. Calcolare l'indice $[H : \mathbb{Z}]$.

10. Siano H e K due sottogruppi di un gruppo finito G. Usare il Teorema di Lagrange per dimostrare che se $\mathrm{MCD}(|H|, |K|) = 1$, allora $H \cap K = \{1_G\}$ (cioè H e K si intersecano banalmente).

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!