Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025
Esercizi, foglio 4

1. Nel gruppo simmetrico S_7, siano
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Decomporre ciascuna delle permutazioni in prodotto di cicli disgiunti; calcolare il prodotto $\alpha\beta$ e decomporlo in prodotto di cicli disgiunti.

2. Nel gruppo simmetrico S_7, calcolare il prodotto
$$\sigma = (3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3).$$
Decomporre poi σ in prodotto di cicli disgiunti, determinandone ordine e segno.

3. Nel gruppo simmetrico S_7, si consideri la permutazione di
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) Scrivere σ come prodotto di cicli disgiunti, determinandone ordine e segno.
   (b) Dimostrare che non esiste alcuna trasposizione $\tau \in S_7$ tale che $\sigma\tau = \tau\sigma$.

4. Elencare tutti gli elementi dei gruppi simmetrici S_2, S_3 e S_4 calcolando per ciascuno di essi l'ordine, il segno, e una decomposizione in cicli disgiunti.

5. (a) Si consideri il ciclo $\sigma = (1\,2\,3\,4) \in S_4$; stabilire se σ^2 è un ciclo.
   (b) In generale, è vero o falso che se σ è un ciclo, allora anche σ^2 è un ciclo?

6. Sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k. È vero o falso che σ^{-1} è un ciclo?

7. Sia $\sigma \in S_n$ un ciclo di lunghezza k.
   (a) Dimostrare che $\mathrm{ord}(\sigma) = k$.
   (b) Stabilire se $\sigma^{-1} = \sigma^{k-1}$.
   (c) Verificare se $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

8. Sia $1 < a < b < n$.
   (a) Calcolare $(1\,a)(1\,b)(1\,a)$ in S_n.
   (b) Dimostrare che se $\sigma \in S_n$, allora esistono elementi $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ non necessariamente distinti tali che
   $$\sigma = \prod_{i=1}^{k} (1\,a_i).$$
   (c) Esprimere la permutazione $(3\,7\,2\,5)(1\,3\,4\,6)(2\,3)$ in tale forma.

9. (a) Sia $\sigma \in S_n$, con $n \geq 3$, tale che $\sigma(a) = b \neq a$: dimostrare che se $c \notin \{a, b\}$ allora $\sigma(b\,c) \neq (b\,c)\sigma$.
   (b) Usare la parte (a) per dimostrare che $Z(S_n) = \{1\}$ per $n \geq 3$.
   (c) Determinare $Z(S_2)$.

10. (a) Sia $\sigma \in A_n$, $n \geq 4$, tale che $\sigma(a) = b \neq a$: dimostrare che se $c, d \notin \{a, b\}$ con $c \neq d$ allora $\sigma(b\,c\,d) \neq (b\,c\,d)\sigma$.
    (b) Usare la parte (a) per dimostrare che $Z(A_n) = \{1\}$ per $n \geq 4$.
    (c) Determinare $Z(A_3)$.

11. Dimostrare che l'applicazione $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ è un epimorfismo di gruppi moltiplicativi. Stabilire se esiste un monomorfismo $\varphi\colon \{\pm 1\} \to S_n$ tale che $\mathrm{sgn} \circ \varphi = id$.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!