Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025
**Esercizi, foglio 2**

1. Sia $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il gruppo moltiplicativo delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$. Stabilire quale dei seguenti insiemi ne è un sottogruppo.
   (a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
   (b) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = I_n\}$.
   (c) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = I_n,\ \det(A) > 0\}$.
   (d) $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}$.
   (e) $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$.
   (f) $\mathrm{SL}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \geq 1\}$.
   (g) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$.

2. Siano date le seguenti applicazioni. Per ciascuna di esse stabilire se si tratta di applicazione iniettiva o suriettiva. Determinare poi se si tratta di omomorfismo rispetto alle operazioni indicate.
   (a) $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $x \mapsto e^x$.
   (b) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto \log|x|$.
   (c) $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}, +)$, $z \mapsto \overline{z}$.
   (d) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $z \mapsto \overline{z}$.
   (e) $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +)$, $z \mapsto |z|^3$.
   (f) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $z \mapsto |z|^3$.
   (g) $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $A \mapsto \det(A)$.
   (h) $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$.
   (i) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$, $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

3. Sia $G$ un gruppo e siano $H$ e $K$ sottogruppi di $G$ aventi le seguenti proprietà.
   (a) $H \cap K = \{1_G\}$.
   (b) Per ogni $h \in H$ e $k \in K$ risulta $hk = kh$.
   (c) Per ogni $g \in G$ esistono $h \in H$ e $k \in K$ tali che $g = hk$.

   Dimostrare che l'applicazione $\varphi\colon H \times K \to G$ definita da $(h, k) \mapsto hk$ è un isomorfismo.

4. Sia $G$ un gruppo. Se $a, b \in G$ il *commutatore di* $a$ *e* $b$ è $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Dimostrare che $ab = ba$ se e solo se $[a, b] = 1$.

5. Sia $G$ un gruppo. In $G$ definiamo la relazione di *coniugio* come segue: $a \sim b$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $gag^{-1} = b$.
   (a) Dimostrare che la relazione di coniugio è una relazione d'equivalenza in $G$.
   (b) Verificare che la relazione di coniugio coincide con la relazione d'uguaglianza se e solo se $G$ è abeliano

6. Sia $G$ un gruppo e sia $g \in G$ fissato. Dimostrare che il *coniugio rispetto a* $g$

$$\begin{aligned} \varphi_g \colon G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

   è un isomorfismo. Dimostrare che $\varphi_g$ è l'identità se e solo se $g \in Z(G)$.

7. Dare un esempio di gruppo $G$ e di due suoi elementi $a, b \in G$ tali che le equazioni

$$ax = b, \qquad xa = b$$

   abbiano soluzioni distinte.

8. Sia $G$ un gruppo.
   (a) Dimostrare che se $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$, allora $G$ è abeliano.
   (b) Dimostrare che se $a^{-1}b^{-1} = (ab)^{-1}$ per ogni $a, b \in G$, allora $G$ è abeliano.
   (c) Dimostrare che se $a^2b^2 = (ab)^2$ per ogni $a, b \in G$, allora $G$ è abeliano.

9. Sia $G$ un gruppo. Il *centro di* $G$ è l'insieme

$$Z(G) = \{x \in G \mid gx = xg \ \forall g \in G\}.$$

   (a) Dimostrare che $Z(G)$ è un sottogruppo.
   (b) Verificare che $Z(G) = G$ se e solo se $G$ è abeliano.
   (c) Determinare $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.

10. Sia $G$ un gruppo. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \varphi \colon G &\longrightarrow G \\ g &\longrightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

   è un endomorfismo se e solo se $G$ è abeliano. Nel caso in cui $G$ sia abeliano, stabilire se $\varphi$ è un automorfismo.

11. In $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottoinsiemi delle matrici triangolari inferiori $L$ e triangolari superiori $U$.
    (a) Dimostrare che $L$ e $U$ sono sottogruppi di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
    (b) Caratterizzare le matrici $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ per cui esistono $B \in L$ e $C \in U$ tali che $A = BC$.
    (c) È vero o falso che $L \vee U = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?
    (d) Determinare elementi $A \in L$ e $B \in U$ tali che $AB \neq BA$.

12. Sia $G$ un gruppo. Dimostrare che l'insieme $\mathrm{Aut}(G)$ degli automorfismi di $G$, dotato dell'operazione di composizione di applicazioni, è un gruppo.

13. Siano $G$ e $H$ gruppi e siano dati $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Stabilire se
$$K := \{g \in G \mid \varphi(g) = \psi(g)\}$$
    è un sottogruppo di $G$.

14. Per ogni coppia $(a, b)$ di numeri reali con $a \neq 0$, sia $\sigma_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da $\sigma_{a,b}(x) = ax + b$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
    (a) Dimostrare che l'insieme
$$G = \{\sigma_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\},$$
    dotato della operazione di composizione di applicazioni, è un gruppo.
    (b) Verificare che il sottoinsieme $T = \{\sigma_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un suo sottogruppo.

**N.B.** Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!