Istituzioni di Algebra e Geometria — Algebra, a.a. 2024-2025

Esercizi, foglio 1

1. Siano X, Y, Z insiemi e siano $\varphi, \varphi' \colon X \to Y$ e $\psi, \psi' \colon Y \to Z$ quattro applicazioni.

   (a) Verificare che se φ e ψ sono iniettive, anche $\psi \circ \varphi$ lo è.

   (b) Verificare che se φ e ψ sono suriettive, anche $\psi \circ \varphi$ lo è.

   (c) Verificare che se ψ è biettiva, $\psi \circ \varphi$ è iniettiva se e solo φ lo è.

   (d) Verificare che se φ è biettiva, $\psi \circ \varphi$ è suriettiva se e solo ψ lo è.

   (e) Verificare che se ψ è iniettiva e $\psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi'$, allora $\varphi = \varphi'$.

   (f) Verificare che se φ è suriettiva e $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$, allora $\psi = \psi'$.

2. Sia data $\varphi \colon X \to Y$ avente un'*inversa destra* $\psi \colon Y \to X$, cioè $\varphi \circ \psi$ è l'identità su Y.

   (a) Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \overline{y}$. Verificare che le applicazioni $\psi_i \colon Y \to X$ definite da
   $$y \mapsto \begin{cases} \psi(y) & \text{se} \quad y \neq \overline{y} \\ x_i & \text{se} \quad y = \overline{y} \end{cases}$$
   sono inverse destre di φ.

   (b) Dedurre che se φ ha un'unica inversa destra, allora φ è iniettiva.

3. Sia data $\varphi \colon X \to Y$ avente un'*inversa sinistra* $\psi \colon Y \to X$, cioè $\psi \circ \varphi$ è l'identità su X.

   (a) Siano $\overline{y} \notin \mathrm{Im}(\varphi)$ e si scelgano $x_1, x_2 \in X$. Verificare che le applicazioni $\psi_i \colon Y \to X$ definite da
   $$y \mapsto \begin{cases} \psi(y) & \text{se} \quad y \neq \overline{y}, \\ x_i & \text{se} \quad y = \overline{y}, \end{cases}$$
   sono inverse sinistre di φ.

   (b) Dedurre che se φ ha un'unica inversa sinistra, allora φ è suriettiva.

4. (a) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$
   $$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^h b^{n-h}.$$

(b) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che per ogni $a \in [-1, +\infty)$

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

(c) Dimostrare per induzione su $n \geq 0$ che per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$

$$\prod_{h=0}^{n} (1 + a^{2^h}) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}.$$

(d) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$\sum_{h=1}^{n} h = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{h=1}^{n} (2h-1) = n^2.$$

(e) Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che

$$\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Stabilire se le seguenti relazioni sono riflessive, simmetriche, antisimmetriche, transitive.

(a) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è pari.

(b) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se $a - b$ è dispari.

(c) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $a = qb$.

(d) In $\mathbb{Z}$ poniamo $a \sim b$ se e solo se esiste $q \in \mathbb{Z}$ tale che $a = qb$.

(e) Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $\varphi \in Y^X$: in X poniamo $x \sim x'$ se e solo se $\varphi(x) = \varphi(x')$.

(f) Nell'insieme L delle rette nel piano poniamo $\ell \sim \ell'$ se e solo se ℓ è parallela a ℓ'.

(g) Nell'insieme L delle rette nel piano poniamo $\ell \sim \ell'$ se e solo se ℓ è perpendicolare a ℓ'.

(h) In $\mathbb{R}^{n,n}$ poniamo $A \sim B$ se esiste $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che $A = P^{-1}BP$.

(i) Sia $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di $\mathbb{R}^{n,n}$ simmetriche: in $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ poniamo $A \sim B$ se esiste $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile tale che $A = {}^tPBP$.

(j) Sia $\mathrm{FinVec}(\mathbb{R})$ l'insieme degli spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ finitamente generati: in $\mathrm{FinVec}(\mathbb{R})$ poniamo $V \sim W$ se e solo se $\dim(V) = \dim(W)$.

6. Dimostrare che le seguenti relazioni $\leq$ sono d'ordine, distinguendo quelle di ordine parziale da quelle di ordine totale.

   (a) In $\mathbb{N}$ si consideri la relazione $x \leq y$ se e solo se x è multiplo di y.

   (b) Dato un insieme A, in $\mathcal{P}(A)$ si consideri la relazione $X \leq Y$ se e solo se $X \subseteq Y$.

   (c) Dato un insieme A, in $\mathcal{P}(A)$ si consideri la relazione $X \leq Y$ se e solo se $X \supseteq Y$.

   (d) Sia A l'insieme ordinato delle lettere dell'alfabeto latino: sull'insieme di tutte le applicazioni $\mathbb{N} \to A$, si consideri la relazione $\varphi \leq \psi$ se e solo se o $\varphi = \psi$, o $\varphi(n) \leq \psi(n)$, dove n è il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(n) \neq \psi(n)$.

7. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, ricordiamo che I_n è l'insieme $I_n = \{ 1, 2, \dots, n-1, n \}$.

   (a) Osservare che se $n \leq m$ allora $I_n \subseteq I_m$.

   (b) Dimostrare che per ogni $i \in I_n$ l'applicazione $\tau_i \colon I_{n+1} \to I_{n+1}$ tale che

   $$\tau_i(i) = n+1, \qquad \tau_i(n+1) = i, \qquad \tau_i(j) = j, \ \forall j \neq i, n+1,$$

   è biunivoca.

   (c) Verificare che se $A \subseteq I_n \subseteq I_{n+1}$ è non vuoto, allora esiste $i \in I_n$ tale che $B = \tau_i(A)$ contiene $n+1$.

8. Ricordiamo che, per definizione, ogni insieme equipotente a $\mathbb{N}$ si dice *numerabile*. Verificare che i seguenti insiemi sono numerabili costruendo esplicitamente un'applicazione biunivoca con dominio $\mathbb{N}$.

   (a) $q\mathbb{Z} = \{qx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ se $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

   (b) $X \times Y$, dove X e Y sono insiemi numerabili e $\varphi \colon \mathbb{N} \to X$ e $\psi \colon \mathbb{N} \to Y$ sono biezioni.

   (c) $X \cup I_2$, dove X è un insieme numerabile e $\varphi \colon \mathbb{N} \to X$ è una biezione.

9. Sia A un insieme e sia $A \subseteq B$.

   (a) Sia $A' \subseteq A$ e $\varphi \colon A \to A'$. Definiamo

   $$\begin{aligned} \psi \colon B &\longrightarrow B' = A' \cup (B \setminus A) \\ b &\longrightarrow \begin{cases} \varphi(b) & \text{se } b \in A, \\ b & \text{se } b \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

   è vero o falso che ψ è iniettiva se e solo se φ è iniettiva?

   (b) Dedurre che se A è infinito, allora B è infinito.

   (c) Dimostrare che A è infinito se e solo se contiene un sottoinsieme numerabile.

10. Siano A e B insiemi. Dimostrare che gli insiemi prodotto cartesiano $A \times B$ e $B \times A$ sono equipotenti costruendo un'applicazione biunivoca fra di loro.

11. Un insieme si dice *al più numerabile* se è o numerabile, o finito. Dimostrare che se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia al più numerabile di insiemi non vuoti e al più numerabili, allora $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è al più numerabile.

12. Si consideri l'insieme dei polinomi $\mathbb{Q}[x]$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$: se $p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ si indichi con $\deg(p)$ il suo grado.
    (a) Per ogni $m \in \mathbb{N}$ sia $\mathbb{Q}[x]_m$ l'insieme dei polinomi $p(x)$ di grado esattamente m: dimostrare che $\mathbb{Q}[x]_m$ è numerabile.
    (b) Verificare che $\mathbb{Q}[x] = \{0\} \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[x]_m$: verificare che $\mathbb{Q}[x]$ è numerabile.
    (c) Dedurre che l'insieme $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ è numerabile.
    (d) È vero o falso che l'insieme $\mathbb{C}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ è numerabile?

13. Siano dati i seguenti insiemi G con l'operazione $*$ indicata a fianco. Per ciascuno di essi stabilire se sono chiusi rispetto a tale operazione, e determinare quali degli assiomi di gruppo abeliano sono verificati.
    (a) $G = \mathbb{N}$, $a * b = a^b$.
    (b) $G = \mathbb{R}$, $a * b = a + b + 3$.
    (c) $G = (1, +\infty)$, $a * b = a^{\log b}$.
    (d) $G = \mathbb{N}$, $a * b = \max\{a, b\}$.

14. Ricordiamo che, dati due insiemi qualsiasi X e Y, si usa la notazione Y^X per indicare l'insieme delle applicazioni $X \to Y$. Siano poi G un gruppo moltiplicativo e X un insieme qualsiasi. Se $\varphi, \psi \in G^X$ definiamo
$$\begin{aligned} \varphi\psi\colon X &\longrightarrow G \\ a &\longrightarrow \varphi(a)\psi(a). \end{aligned}$$
    Verificare che G^X con tale operazione è un gruppo.
    Verificare che G^X è abeliano se e solo se G è abeliano.

N.B. Ricordate che in generale il metodo per risolvere un esercizio non è unico. Se qualche cosa non vi è chiara, e/o se pensate di aver trovato un errore di stampa, fatemi sapere!