GEOMETRIA

28 Giugno 2023 – 60 minuti

VERSIONE X

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande dell'esercizio nell'apposito spazio.*

Q1	a	b	c	d	**Q5**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q6**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q7**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q8**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

CN		QUIZ		ESERCIZIO		TOTALE	

Q1. Nello spazio sia data la sfera $\mathcal{S}$ di equazione

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2x + 4y + 2z = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Il centro di $\mathcal{S}$ è $(1, 2, 1)$.

(b) Il centro di $\mathcal{S}$ ha distanza 1 dal punto $(0, 0, -2)$.

(c) La distanza del piano $x + 2y + z = 0$ dal centro della sfera è uguale al raggio.

(d) $(0, 0, -2) \in \mathcal{S}$.

Q2. Siano dati $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, i versori di $\mathbb{R}^3$, il punto $P = (2, 1, 3)$ e il vettore $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Sia r la retta passante per P e la direzione del vettore $\vec{u}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La retta r è ortogonale al piano $x - y + 3z = 0$.

(b) La retta r è ortogonale al vettore $\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}$.

(c) Il punto $(2, 2, 3)$ appartiene alla retta r.

(d) Il punto $(2, -1, 3)$ appartiene alla retta r.

Q3. Sia data la forma quadratica $q(x, y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $q(x, y) = 0$ è una conica non degenere;

(b) $q(1, -3) < 0$.

(c) La conica $q(x, y) - 2 = 0$ è una parabola;

(d) La conica $q(x, y) - 2 = 0$ è un'ellisse.

Q4. Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e si supponga che il sistema $AX = \mathbf{b}$ abbia una soluzione unica. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La matrice A è invertibile;

(b) Il rango di A è m;

(c) La matrice A ha almeno tante righe quante colonne, ossia $m \geq n$;

(d) Il rango di A è n.

Q5. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) A è invertibile;

(b) A non possiede autovalori non nulli con parte reale nulla;

(c) A ha almeno due autovalori reali;

(d) Gli autovalori non nulli di A sono complessi coniugati.

Q5. Sia $f(x, y, z, t) = (2x - y + t, x - y, z - t)$.

(a) $\ker(f) = \{(0, 0, 0, 0)\}$;

(b) f non è suriettiva;

(c) Una matrice associata a f è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Il sottospazio $\{(u, u, v, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$ contiene il nucleo $\ker(f)$ di f;

Q6. Sia $2x - y + 3z = 0$ l'autospazio relativo all'autovalore 3 di una matrice simmetrica A.

(a) $Spec(A) = \{3\}$;

(b) La molteplicità algebrica di 3 è 1;

(c) L'autospazio relativo al secondo autovalore di A è la direzione $[2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3]$;

(d) Non esistono matrici ortogonali che diagonalizzino A.

Q8. Siano V_1 e V_2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) V_1 e V_2 posseggono almeno un vettore in comune;

(b) I sottospazi V_1 e V_2 potrebbero avere intersezione vuota;

(c) $\dim(V_1 + V_2) = 2$;

(d) $\dim(V_1 + V_2) = 4$;

Esercizio.

Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z - t \\ y + z \\ x - y - t \end{pmatrix}$$

(a) Trovare la matrice M_f di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente.

(b) Determinare la dimensione del nucleo di f.

(c) Determinare la dimensione dell'immagine;

(d) Determinare una base del nucleo di f.

(e) Determinare una base dell'immagine;

(f) Determinare, se esiste, un vettore di $\mathbb{R}^3$ privo di controimmagini;

(g) Dato il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, determinare l'insieme $f^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini.

GEOMETRIA

28 Giugno 2023 – 60 minuti

VERSIONE Y

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande dell'esercizio nell'apposito spazio.*

Q1	a	b	c	d	**Q5**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q6**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q7**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q8**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

CN		QUIZ		ESERCIZIO		TOTALE	

VERSIONE Y

Q1. Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matrice simmetrica, avente $(t-2)^2(t-5)^2$ come polinomio caratteristico. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A non è diagonalizzabile, perchè possiede solo autovalori doppi;

(b) La matrice A possiede due autospazi ciascuno di dimensione 2;

(c) $\det(A) = 0$;

(d) La matrice A non è invertibile.

Q2. Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e si supponga che il sistema $AX = \mathbf{b}$ abbia almeno due soluzioni distinte. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Il sistema lineare $AX = \mathbf{0}$ ha infinite soluzioni;

(b) La matrice A è invertibile;

(c) La matrice A ha almeno tante righe quante colonne, ossia $m \geq n$;

(d) Il rango di A è n.

Q3. Sia $f(x, y, z, t) = (x - 2y + z, 2x + 3y, 4x - z - t)$.

(a) $\dim \ker(f) = 3$;

(b) Il sottospazio $\{(u, v, w, 7u+5v) \mid u, v, w \in \mathbb{R}\}$ contiene il nucleo $\ker(f)$ di f;

(c) f è iniettiva;

(d) Una matrice associata a f è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q4. Sia data la retta $r : \begin{cases} 2x - y - z & = & 0 \\ 2x + y + 2z - 1 & = & 0 \end{cases}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?.

(a) r passa per l'origine;

(b) r è contenuta nel piano $4x + z - 2 = 0$;

(c) r è parallela alla retta luogo dei punti $(10 - t, 1 - 6t, 4t)$;

(d) r è contenuta nel piano yz.

Q5. Sia $3x - y + 2z = 0$ l'autospazio relativo all'autovalore 12 di una matrice simmetrica A.

(a) $\mathrm{Spec}(A) = \{12\}$;

(b) La molteplicità algebrica di 12 è 1;

(c) L'autospazio relativo al secondo autovalore di A è la direzione $[3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3]$;

(d) Non esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Q6. Siano V_1 e V_2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I sottospazi V_1 e V_2 possono avere intersezione vuota;

(b) $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$;

(c) $\dim(V_1 + V_2) = 4$;

(d) $\dim(V_1 + V_2) \geq 2$.

Q7. Sia data la forma quadratica $q(x, y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $q(1, -3) < 0$;

(b) La conica $q(x, y) - 2 = 0$ è una circonferenza;

(c) La conica $q(x, y) = 0$ è una conica degenere di tipo parabolico;

(d) La conica $q(x, y) - 2 = 0$ non ha punti reali.

Q8. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) è invertibile;

(b) Gli autovalori non nulli sono complessi coniugati;

(c) Possiede autovalori non nulli con parte reale nulla;

(d) ha almeno due autovalori reali.

Esercizio.

Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+2z \\ 2y+2z \end{pmatrix}$$

(a) Trovare la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ rispettivamente.

(b) Determinare la dimensione del nucleo di A.

(c) Determinare una base del nucleo di A;

(d) Determinare la dimensione dell'immagine di A;

(e) Determinare una base dell'immagine;

(f) Determinare, se esiste, un vettore di $\mathbb{R}^4$ privo di controimmagini;

(g) Dato il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, determinare l'insieme $A^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini.

GEOMETRIA

28 Giugno 2023 – 60 minuti

VERSIONE Z

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande dell'esercizio nell'apposito spazio.*

Q1	a	b	c	d	**Q5**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q6**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q7**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q8**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

CN		QUIZ		ESERCIZIO		TOTALE	

VERSIONE Z

Q1. Siano V_1 e V_2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Se $\dim(V_1 + V_2) = 2$ allora $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$;

(b) I sottospazi V_1 e V_2 possono avere intersezione vuota;

(c) $\dim(V_1 + V_2) \geq 2$;

(d) $\dim(V_1 + V_2) = 1$.

Q2. Sia $x - y + z = 0$ l'autospazio relativo all'autovalore 21 di una matrice simmetrica A e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) $Spec(A) = \{21\}$;

(b) La molteplicità algebrica di 21 è 1;

(c) La terna $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A;

(d) Non esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Q3. Sia $f(x, y, z, t) = (x - 2y + z, 2x + 3y, x - z - t)$.

(a) Il sottospazio $\{(u, v, 2v - u, w) \,|\, u, v \in \mathbb{R}\}$ contiene il nucleo $\ker(f)$ di f;

(b) $\dim \ker(f) = 2$;

(c) f è iniettiva;

(d) Una matrice associata a f è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q4. Siano $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ i versori di $\mathbb{R}^3$. Siano dati il punto $P = (1, 1, -2)$ e il vettore $\vec{u} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}$. Sia r la retta passante per P e avente direzione quella del vettore $\vec{u}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La retta r è ortogonale al piano $x - y + 4z = 0$.

(b) La retta r è ortogonale alla direzione del vettore $3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

(c) Il punto $(2, -1, 3)$ appartiene alla retta r.

(d) Il punto $(1, 1, 1)$ appartiene alla retta r.

Q5. Sia data la forma quadratica $q(x, y) = 2x^2 - 4xy + 11y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $q(1, -3) < 0$;

(b) La conica $q(x, y) - x - y = 0$ è una circonferenza;

(c) La conica $q(x, y) + 5x - y - 1 = 0$ è una una parabola;

(d) La conica $q(x, y) + 5x - y - 1 = 0 = 0$ è un'ellisse.

Q6. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) è invertibile;

(b) Possiede autovalori non nulli con parte reale nulla;

(c) Il polinomio caratteristico possiede due radici complesse coniugate;

(d) ha almeno due autovalori reali.

Q7. Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e si supponga che il sistema $AX = \mathbf{b}$ abbia almeno due soluzioni distinte. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La matrice A è invertibile;

(b) Il rango di A è n;

(c) Il sistema lineare $AX = \mathbf{0}$ ha ∞^{n-r} soluzioni dove r è il rango di A;

(d) La matrice A ha tante righe quante colonne, ossia $m = n$.

Q8. E' data la retta $r : \begin{cases} x - y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}$ Quale delle seguenti affermazioni è vera?.

(a) r passa per il punto $(1, 1, 1)$;

(b) r ha la direzione del vettore $(1, 1, 0)^T$;

(c) r è contenuta nel piano $z = 0$;

(d) r è contenuta nel piano $2x - z = 0$.

Esercizio.

Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ y + z \\ x - y + 3z \\ x + z \end{pmatrix}$$

(a) Trovare la matrice M di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, rispettivamente.

(b) Determinare il nucleo di M.

(c) Stabilire se f è iniettiva;

(d) Determinare la dimensione dell'immagine di f;

(e) determinare una base dell'immagine;

(f) Provare che f non è suriettiva e determinare un vettore di $\mathbb{R}^4$ privo di controimmagini

(g) Dato il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, stabilire se l'insieme $f^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini è vuoto o no.

GEOMETRIA

28 Giugno 2023 – 60 minuti

VERSIONE U

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*
- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande dell'esercizio nell'apposito spazio.*

Q1	a	b	c	d	**Q5**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q6**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q7**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q8**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

CN		QUIZ		ESERCIZIO		TOTALE	

Q1. Sia $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ una matrice simmetrica, avente $t(t-2)^2(t-4)^2$ come polinomio caratteristico. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A non è diagonalizzabile, perchè possiede autovalori doppi;

(b) La matrice A non possiede autospazi di dimensione 2 rispetto all'autovalore 4;

(c) La matrice A è invertibile.

(d) $\det(A) = 0$.

Q2. Siano V_1 e V_2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^6$ di dimensione 2. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I sottospazi V_1 e V_2 non posseggono vettori comuni;

(b) $\dim(V_1 + V_2) \geq 2$;

(c) Se $\dim(V_1 + V_2) = 3$ allora $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$;

(d) $\dim(V_1 + V_2) = 3$.

Q3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Ha determinante non nullo;

(b) Possiede due autovalori distinti non reali;

(c) Il nucleo di A ha dimensione zero;

(d) Possiede almeno due autovalori reali.

Q4. Si consideri i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si indichi l'affermazione corretta.

(a) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_3$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$;

(b) $\dim_{\mathbb{R}}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = 3$;

(c) $\lambda \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$;

(d) I vettori$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sono linearmente indipendenti.

Q5. Sia data la retta $r : \begin{cases} 2x - y - z & = & 0 \\ 2x + y + 2z - 1 & = & 0 \end{cases}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?.

(a) r è contenuta nel piano $4x + z - 1 = 0$;

(b) r passa per l'origine;

(c) r è parallela alla retta $\mathbf{r}(t) = (10 - t, 1 - 3t, 4t)$;

(d) r è contenuta nel piano yz.

Q6. Siano $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e si supponga che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ abbia almeno due soluzioni distinte. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La matrice A è invertibile;

(b) Il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possiede soluzioni se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|\mathbf{b})$;

(c) Il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possiede infinite soluzioni;

(d) La matrice A ha almeno tante colonne quante righe, ossia $m \leq n$.

Q7. Sia $f(x, y, z, t) = (x - 3y + z, 4x + 3y, x - z - t)$.

(a) $\dim \ker(f) = 2$;

(b) f è iniettiva;

(c) Il sottospazio $\{(u, v, v, 6u) \,|\, u, v \in \mathbb{R}\}$ contiene il nucleo $\ker(f)$ di f;

(d) Una matrice associata a f è $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q8. Sia $\left[(3, 1, 2)^T\right]$ l'autospazio relativo all'autovalore 5 di una matrice simmetrica 3×3.

(a) La molteplicità algebrica di 5 è 2;

(b) $Spec(A) = \{5, 1\}$;

(c) Non esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

(d) I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono autovettori linearmente indipendenti di A.

Esercizio.

Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ y+z \\ x-y+3z \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Trovare la matrice M di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ rispettivamente.

(b) Qual è la dimensione del nucleo di f?

(c) Stabilire se f è iniettiva;

(d) Determinare la dimensione dell'immagine di f;

(e) Determinare una base dell'immagine;

(f) Provare che f non è suriettiva e determinare un vettore di $\mathbb{R}^4$ privo di controimmagini

(g) Dato il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, determinare l'insieme $f^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini.