GEOMETRIA

29 Febbraio 2024 – 60 minuti

VERSIONE Y

Istruzioni:

- *Scrivere cognome, nome, matricola in* STAMPATELLO *negli appositi spazi.*

  *COGNOME:*________________________ *NOME:*________________________
  *MATRICOLA:*________________________ ____ *DOCENTE:* GATTO

- *Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.*
- *Trascrivere la risposta alle singole domande dell'esercizio nell'apposito spazio.*

Q1	a	b	c	d	**Q5**	a	b	c	d
Q2	a	b	c	d	**Q6**	a	b	c	d
Q3	a	b	c	d	**Q7**	a	b	c	d
Q4	a	b	c	d	**Q8**	a	b	c	d

Non scrivere in questo spazio

CN		QUIZ		ESERCIZIO		TOTALE	

VERSIONE Y

Q1. Sia $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matrice simmetrica, avente $(t-2)^2(t-5)^2$ come polinomio caratteristico. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A non è diagonalizzabile, perchè possiede solo autovalori doppi;

(b) La matrice A possiede due autospazi ciascuno di dimensione 2;

(c) $\det(A) = 0$;

(d) La matrice A non è invertibile.

Q2. Siano $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ e si supponga che il sistema $AX = \mathbf{b}$ abbia almeno due soluzioni distinte. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) Il sistema lineare $AX = \mathbf{0}$ ha infinite soluzioni;

(b) La matrice A è invertibile;

(c) La matrice A ha almeno tante colonne quante righe, ossia $n \geq m$;

(d) Il rango di A è n.

Q3. Sia $f : \mathbb{R}^{1\times 4} \to \mathbb{R}^{1\times 3}$ definita da $f(x,y,z,t) = (x-2y+z, 2x+3y, 4x-z-t)$.

(a) $\dim\ker(f) = 3$;

(b) Il sottospazio $\{(u,v,w,7u+5v) \mid u,v,w \in \mathbb{R}\}$ interseca il nucleo $\ker(f)$ di f nel solo vettore nullo;

(c) f è suriettiva;

(d) Una matrice associata a f è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q4. Sia data la retta $r : \begin{cases} 2x - y - z & = 0 \\ 2x + y + 2z - 1 & = 0 \end{cases}$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?.

(a) r passa per l'origine;

(b) r è contenuta nel piano $4x + z - 1 = 0$;

(c) r è parallela alla retta luogo dei punti $(10-t, 1-6t, 4t)$;

(d) r è contenuta nel piano yz.

Q5. Sia $2x - y + 5z = 0$ l'autospazio relativo all'autovalore 8 di una matrice simmetrica A.

(a) $\mathrm{Spec}(A) = \{8\}$;

(b) La molteplicità algebrica di 12 è 1;

(c) Il vettore $4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3$ è un autovettore di A;

(d) Non esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Q6. Siano V_1 e V_2 sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) I sottospazi V_1 e V_2 possono avere intersezione vuota;

(b) $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$;

(c) $\dim(V_1 + V_2) = 4$;

(d) $\dim(V_1 + V_2) \geq 2$.

Q7. Sia data la forma quadratica $q(x, y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $q(1, -3) < 0$;

(b) La conica $q(x, y) - 2 = 0$ è una circonferenza;

(c) La conica $q(x, y) = 0$ è una conica degenere di tipo parabolico;

(d) La conica $q(x, y) - 2 = 0$ non ha punti reali.

Q8. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora:

(a) A è invertibile;

(b) Il polinomio caratteristico di A possiede due radici immaginarie;

(c) A possiede autovalori non nulli con parte immaginaria nulla;

(d) A ha almeno due autovalori reali.

Esercizio.

Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y+2z \\ 2y+2z \end{pmatrix}$$

(a) Trovare la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ rispettivamente.

(b) Determinare la dimensione del nucleo di A.

(c) Determinare una base del nucleo di A;

(d) Determinare la dimensione dell'immagine di A;

(e) Determinare una base dell'immagine;

(f) Determinare, se esiste, un vettore di $\mathbb{R}^4$ privo di controimmagini;

(g) Dato il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, determinare l'insieme $A^{-1}(\mathbf{v})$ delle sue controimmagini.