

# GEOMETRIA

Prova Straordinaria del 20 Settembre 2017 – 60 minuti

Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE:

## GATTO

Q1	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d
Q2	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d
Q3	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d
Q4	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d

Q5	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d
Q6	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d
Q7	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d
Q8	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> b	<input type="checkbox"/> c	<input type="checkbox"/> d

---

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZIO

TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Sino dati il piano  $\pi$  e la sfera  $S$  di equazioni:

$$\begin{cases} \pi & : & 3x - y + 2z - 5 & = & 0 \\ S & : & x^2 + y^2 + z^2 - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La proiezione ortogonale di  $S$  sul piano ortogonale alla direzione  $\mathbf{v} := (3, -1, 2)$  è una circonferenza;
- (b)  $r$  è contenuta in un piano parallelo al piano  $xy$ ;
- (c)  $r$  è parallela alla retta  $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t, 1 - 5t, t)$ ;
- (d)  $r$  è contenuta nel piano  $2x + z = 0$ .

**Q2.** Sia data la superficie dello spazio

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La superficie non contiene circonferenze;
- (b) Il piano tangente nei punti della retta  $(t, t, \sqrt{2}t)$  è costante;
- (c) La superficie non contiene coniche degeneri;
- (d) La superficie contiene infinite rette passanti per  $P = (1, 0, 1)$ .

**Q3.** Sia  $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$  lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e sia data l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$$

definita da

$$f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (a_0 - a_1) + (a_1 + a_2)X + (a_0 + a_1 + a_2)X^2$$

- (a) Esistono basi per cui la matrice associata all'applicazione lineare ha determinante nullo;
- (b) Il determinante della matrice associata all'applicazione lineare non dipende dalla scelta delle basi per rappresentarla;
- (c) Esiste una base  $B_1$  di  $\mathbb{R}^3$  ed una base  $B_2$  di  $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$  tale che la matrice associata  $M^{B_2, B_1}$  coincide con la matrice identica;
- (d) L'applicazione lineare  $f$  è un endomorfismo.

**Q4.** Siano  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(1, 1, 4)$ ,  $C(2, 2, 2)$ ,  $D(1, 0, 5)$  punti dello spazio:

- (a) Esiste una sola sfera passante per  $A, B, C, D$ ;
- (b) Esiste una sola circonferenza sul piano  $x + y + z + 6 = 0$  passante per  $A, B, C, D$ ;
- (c) Non esiste nessuna circonferenza per  $A, B, C, D$ ;
- (d) Esistono infinite sfere che tagliano una stessa circonferenza sul piano  $x + y + z - 6 = 0$ .

**Q5.** Sia dato il vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (a) Le componenti di  $\mathbf{v}$  sono gli autovalori della matrice  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ;
- (b) Sono le componenti di  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  nella base  $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$ ;
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$ .
- (d)  $\mathbf{v}$  è il vettore delle componenti del vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}$  nella base  $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ;

**Q6.** Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) E' diagonalizzabile;
- (b) E' invertibile;
- (c) Possiede almeno due autovalori di segno opposto;
- (d) Il polinomio caratteristico di  $M$  è  $p_M(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 4$ .

**Q7.** Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_{3 \times 3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) La matrice  $A$  possiede l'autovalore 3;
- (b)  $(A - \mathbf{1}_{3 \times 3})^4$  è uguale alla matrice nulla.
- (c) La matrice è diagonalizzabile anche se non ha tutti autovalori distinti;
- (d) La matrice  $A$  non è invertibile;

**Q8.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice quadrata di rango minore o uguale a 1. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (a) La matrice  $A$  è il prodotto di una colonna per una riga.
- (b) Il sistema lineare  $AX = \mathbf{b}$  possiede soluzioni per qualsiasi scelta di  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (c) Le soluzioni del sistema lineare omogeneo  $AX = \mathbf{0}$  formano un sottospazio di dimensione 1;
- (d) La matrice  $A$  è il prodotto di una riga per una colonna;

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

**Q1.** Mostrare che  $A$  è diagonalizzabile;

**Q2.** Decomporre  $\mathbb{R}^3$  come somma diretta ortogonale di autospazi di  $A$ ;

**Q3.** Trovare la proiezione ortogonale del vettore  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  su ciascun autospazio di  $A$ .

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

**Esercizio 2.** Sia data la funzione

$$f(u, v) = (-\sin u \cdot (2 + \cos v), \cos u \cdot (2 + \cos v), \sin v)$$

In  $\mathbb{R}^3$  si consideri la superficie parametrizzata  $\mathcal{S}$  definita dalla funzione  $f$ , cioè  $\mathcal{S} = \text{Im}(f)$

- (i) Mostrare che il differenziale di  $f$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .
- (ii) Determinare la retta normale al piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto  $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ .
- (iii) Determinare un'equazione cartesiana per il piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto  $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*





# GEOMETRIA

Prova Straordinaria del 20 Settembre 2017 – 60 minuti

Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE:

## GATTO

Q1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Q5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

---

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZIO

TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Nello spazio tridimensionale sia data la quadrica  $\mathcal{Q}$  e il piano  $\pi$  rispettivamente di equazioni

$$2x^2 - y^2 + z^2 - 4x = 0, \quad x = 0$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La conica  $\mathcal{Q} \cap \pi$  è degenera;
- (b) L'iperbole  $\mathcal{Q} \cap \pi$  ha centro sul piano  $y - 1 = 0$ ;
- (c) Il piano  $z = 0$  è tangente a  $\mathcal{Q}$ ;
- (d) La quadrica è un ellissoide.

**Q2.** Sia data la retta  $r : 2x - y - z = 0; 2x + y + 2z - 1 = 0$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $r$  passa per l'origine;
- (b)  $r$  è contenuta nel piano  $4x + z - 2 = 0$ ;
- (c)  $r$  è parallela alla retta  $\mathbf{r}(t) = (10 - t, 1 - 6t, 4t)$ ;
- (d)  $r$  è contenuta nel piano  $yz$ .

**Q3.** Siano  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  e  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ . Si supponga  $A$  di rango 2. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (a) esiste  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  tale che il sistema lineare  $AX = \mathbf{b}$  non possiede soluzioni;
- (b) il sistema lineare omogeneo  $AX = 0$  possiede una sola soluzione;
- (c) il sistema lineare  $AX = A\mathbf{e}_3$  possiede  $\infty^2$  soluzioni;
- (d) il sistema lineare  $AX = B$  ha  $\infty^1$  soluzioni, qualunque sia  $B$ .

**Q4.** Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{1}_{3 \times 3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) La matrice  $A$  possiede l'autovalore 3;
- (b)  $(A - \mathbf{1}_{3 \times 3})^4$  è uguale alla matrice nulla.
- (c) La matrice è diagonalizzabile anche se non ha tutti autovalori distinti;
- (d) La matrice  $A$  non è invertibile;

**Q5.** Sia data la curva  $\gamma(t) = (t + e^t + t^2, -t - e^t - t^2, 3e^t - 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) esistono punti di  $\gamma$  in cui il vettore tangente è nullo;
- (b) la curva  $\gamma$  è contenuta in un piano;
- (c) La curva possiede punti non regolari;
- (d) La curva è contenuta nel piano  $y = 0$ ;

**Q6.** Data la funzione  $f(x, y) = e^{y^2 \cos x - x \sin y + 2}$ , si indichi l'affermazione corretta.

- (a)  $f$  non possiede punti critici;
- (b) Il gradiente di  $f$  nell'origine non è nullo;
- (c) Il differenziale di  $f$  nell'origine è nullo;
- (d)  $f(0, 0) = 2$ .

**Q7.** Sia data la forma quadratica  $q(x, y) = 4x^2 - 8xy + 5y^2$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $q(1, -3) < 0$ ;
- (b)  $q(x, y) \leq 0$  per tutti gli  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- (c)  $q(x, y)$  è definita positiva;
- (d) esiste una coppia di numeri reali  $(a, b) \neq (0, 0)$  tale che  $q(a, b) = 0$ .

**Q8.** Sia data la funzione  $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) il punto  $(1, 1, 1)$  appartiene al grafico di  $f(x, y)$ ;
- (b) il grafico di  $f(x, y)$  è un paraboloide;
- (c)  $f(x, y)$  non è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ ;
- (d) Nessun piano tangente al grafico è parallelo al piano  $xy$ .

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Sia data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Provare che 2 è un autovalore di  $A$  e trovare gli autovettori;
- (ii) Verificare che il vettore  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  appartiene all'immagine di  $A$  e trovare l'insieme delle sue controimmagini;
- (iii) Dire se esiste una matrice  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tale che  $P^T A P$  sia diagonale; dove  $P^T$  indica la trasposta di  $P$ .

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

**Esercizio 2.** Sia data la funzione

$$f(u, v) = (\cos u \cdot (2 + \cos v), -\sin u \cdot (2 + \cos v), \sin v)$$

In  $\mathbb{R}^3$  si consideri la superficie parametrizzata  $\mathcal{S}$  definita dalla funzione  $f$ , cioè  $\mathcal{S} = \text{Im}(f)$

- (i) Mostrare che il differenziale di  $f$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .
- (ii) Determinare la retta normale al piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto  $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ .
- (iii) Determinare un'equazione cartesiana per il piano tangente a  $f$  nel punto  $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*





# GEOMETRIA

Prova Straordinaria del 20 Settembre 2017 – 60 minuti

Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE:

## GATTO

Q1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Q5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

---

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZIO

TOTALE

## QUIZ

**Q1.** Sia data la curva  $\gamma(t) = (t + e^t + t^2, t - e^t - t^2, 3e^t - 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Il vettore tangente a  $\gamma$  nel punto  $t = 0$  è  $(2\vec{i} + 3\vec{k})$ ;
- (b) la curva  $\gamma$  è piana;
- (c) La curva possiede punti non regolari;
- (d) La curva è contenuta nel piano  $x + y + z = 0$ ;

**Q2.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$  una arbitraria matrice quadrata simmetrica reale con polinomio caratteristico  $t(t^2 - 9)$ . Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (a)  $A$  è diagonalizzabile;
- (b)  $A$  è ortogonale;
- (c)  $A$  è invertibile;
- (d)  $\det(A) \neq 0$ .

**Q3.** Sia dato un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si indichi l'affermazione corretta.

- (a)  $f$  è iniettivo;
- (b) il vettore  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  appartiene al nucleo di  $f$ ;
- (c) Il nucleo di  $f$  contiene il solo vettore nullo;
- (d)  $f$  non ha autovettori.

**Q4.** Sia  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2] \quad \text{e} \quad V = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (a)  $V \subseteq U$  è l'insieme vuoto;
- (b)  $\dim(U \cap V) = 0$ ;
- (c)  $\dim(U + V) < 3$ ;
- (d) La somma di  $U$  e  $V$  non è diretta.

**Q5.** Nello spazio tridimensionale sia data la quadrica  $\mathcal{Q}$  e il piano  $\pi$  rispettivamente di equazioni

$$2x^2 - y^2 + z^2 - 4x - y = 0, \quad x = 0$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) La conica  $\mathcal{Q} \cap \pi$  è una iperbole;
- (b) L'iperbole  $\mathcal{Q} \cap \pi$  è degenera;
- (c) Il piano  $y = 0$  è tangente a  $\mathcal{Q}$ ;
- (d) La quadrica è un ellissoide.

**Q6.** Sia data la funzione  $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ .

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) il punto  $(1, 1, 1)$  appartiene al grafico di  $f(x, y)$ ;
- (b) Il grafico di  $f(x, y)$  è un cono con vertice l'origine;
- (c)  $f(x, y)$  non è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ ;
- (d) Esiste un piano tangente al grafico parallelo al piano  $xy$ .

**Q7.** Sia data la forma quadratica  $q(x, y) = 3x^2 - 10xy + 8y^2$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $q(1, -3) < 0$ ;
- (b)  $q(x, y) \geq 0$  per tutti gli  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
- (c)  $q(x, y)$  è definita positiva;
- (d) esiste una coppia di numeri reali  $(a, b) \neq (0, 0)$  tale che  $q(a, b) = 0$ .

**Q8.** Data la funzione  $f(x, y) = e^{y^2 \cos x - x \sin y + 2}$ , si indichi l'affermazione corretta.

- (a)  $f$  non possiede punti critici;
- (b) Il gradiente di  $f$  nell'origine è nullo;
- (c) Il differenziale di  $f$  nell'origine non è nullo;
- (d)  $f(0, 0) = 3$ .

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare autovalori e autospazi di  $A$ ;
- (ii) Verificare che il vettore  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  appartiene all'immagine di  $A$  e trovare l'insieme delle sue controimmagini;
- (iii) Dire se esiste una matrice  $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tale che  $Q^T A Q$  sia diagonale.

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

**Esercizio 2.** Sia data la funzione

$$f(u, v) = (-\sin u \cdot (2 + \cos v), \cos u \cdot (2 + \cos v), \sin v)$$

In  $\mathbb{R}^3$  si consideri la superficie parametrizzata  $\mathcal{S}$  definita dalla funzione  $f$ , cioè  $\mathcal{S} = \text{Im}(f)$

- (i) Mostrare che il differenziale di  $f$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .
- (ii) Determinare la retta normale al piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto  $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ .
- (iii) Determinare un'equazione cartesiana per il piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto  $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*





# GEOMETRIA

Prova Straordinaria del 20 Settembre 2017 – 60 minuti

Istruzioni:

- Scrivere cognome, nome, matricola in STAMPATELLO negli appositi spazi.
- Per ogni quiz nella prima parte, indicare l'affermazione giudicata corretta nella tabella in questa pagina.
- Trascrivere la risposta alle singole domande degli esercizi della seconda parte nelle pagine bianche alla fine di ogni esercizio.

COGNOME, NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

DOCENTE:

GATTO

Q1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q4	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Q5	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q7	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Q8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

---

Non scrivere in questo spazio

QUIZ

ESERCIZIO

TOTALE

## QUIZ

- Q1.** Sia  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una arbitraria matrice reale quadrata con polinomio caratteristico  $t(t^2 + 1)$ . Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?
- (a)  $A$  è simmetrica;
  - (b)  $A$  ha rango 3;
  - (c)  $A$  non è diagonalizzabile sui reali;
  - (d) Ogni autospazio di  $A$  ha dimensione almeno 2.
- Q2.** Sia data la curva  $\gamma(t) = (t + e^t + t^2, 2t - e^t - t^2, 3e^t - 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- (a) Il vettore tangente a  $\gamma$  nel punto  $t = 0$  è  $(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$ ;
  - (b) la curva  $\gamma$  è piana;
  - (c) La curva possiede punti non regolari;
  - (d) La curva è contenuta nel piano  $x - y + z = 0$ ;
- Q3.** Data la funzione  $f(x, y) = e^{y^2 \cos x - x \sin y + 2}$ , si indichi l'affermazione corretta.
- (a)  $f$  non possiede punti critici;
  - (b) Il gradiente di  $f$  nell'origine è nullo;
  - (c) Il differenziale di  $f$  nell'origine non è nullo;
  - (d)  $f(0, 0) = 3$ .
- Q4.** Sia data la forma quadratica  $q(x, y) = 3x^2 - 10xy + 8y^2$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- (a)  $q(1, 1) < 0$ ;
  - (b)  $q(x, y) \geq 0$  per tutti gli  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;
  - (c)  $q(x, y)$  è definita positiva;
  - (d) esiste una coppia di numeri reali  $(a, b) \neq (0, 0)$  tale che  $q(a, b) = 0$ .

**Q5.** Sia data la retta  $r : 2x - y - z = 0; 2x + y + 2z - 1 = 0$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a)  $r$  passa per l'origine;
- (b)  $r$  è contenuta nel piano  $4x + z - 1 = 0$ ;
- (c)  $r$  è parallela alla retta  $\mathbf{r}(t) = (10 - t, 1 - 3t, 4t)$ ;
- (d)  $r$  è contenuta nel piano  $yz$ .

**Q6.** Siano  $A \in \mathbb{R}^{5,3}$  e  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ . Si supponga  $A$  di rango 2. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

- (a) Il sistema lineare  $AX = \mathbf{b}$  possiede soluzioni per tutti i  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$ ;
- (b) il sistema lineare omogeneo  $AX = 0$  non possiede soluzioni;
- (c) il sistema lineare  $AX = A\mathbf{e}_3$  possiede  $\infty^1$  soluzioni;
- (d) il sistema lineare  $AX = \mathbf{b}$  ha infinite soluzioni, qualunque sia  $\mathbf{b}$ .

**Q7.** Sia  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e si considerino i seguenti sottospazi:

$$U = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3] \quad V = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- (a)  $U \subseteq V$ ;
- (b)  $\dim(U \cap V) = 1$ ;
- (c)  $\dim(U + V) = 3$ ;
- (d) La somma di  $U$  e  $V$  è diretta.

**Q8.** Sia dato un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^4$  tale che

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si indichi l'affermazione corretta.

- (a)  $f$  è iniettivo;
- (b) il vettore  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  non appartiene al nucleo di  $f$ ;
- (c) Il nucleo di  $f$  contiene vettori non nulli;
- (d)  $f$  non ha autovettori.

## ESERCIZI

**Esercizio 1.** Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare autovalori e autospazi di  $A$ ;
- (ii) Verificare che il vettore  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  appartiene all'immagine di  $A$  e trovare l'insieme delle sue controimmagini;
- (iii) Dire se esiste una matrice  $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tale che  $Q^T A Q$  sia diagonale.

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

*Svolgimento dell'esercizio 1:*

**Esercizio 2.** Sia data la funzione

$$f(u, v) = (\cos u \cdot (2 + \cos v), -\sin u \cdot (2 + \cos v), \sin v)$$

In  $\mathbb{R}^3$  si consideri la superficie parametrizzata  $\mathcal{S}$  definita dalla funzione  $f$ , cioè  $\mathcal{S} = \text{Im}(f)$

- (i) Mostrare che il differenziale di  $f$  ha rango 2 per ogni  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .
- (ii) Determinare la retta normale al piano tangente a  $\mathcal{S}$  nel punto  $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ .
- (iii) Determinare un'equazione cartesiana per il piano tangente a  $f$  nel punto  $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ .

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

*Svolgimento dell'esercizio 2:*

