

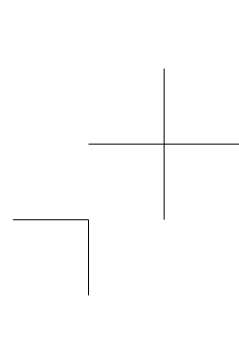
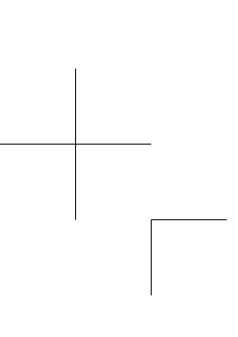


GIUSEPPE CALAFIORE

ELEMENTI DI AUTOMATICA

**CLUT**





Classe L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: clut.cls


©2007 C.L.U.T. Editrice  
Proprietà letteraria riservata  
Stampato in Italia da STAMPATRE - Torino  
Copyright C.L.U.T. - Torino - 2007

ISBN 88-7992-978-88

Edizioni C.L.U.T. - Torino  
Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino  
Tel. 011 564 79 80 - Fax 011 54 21 92

RIPRODUZIONE TOTALE O PARZIALE VIETATA




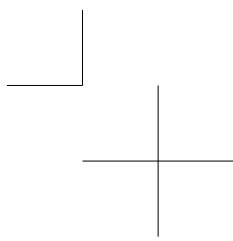
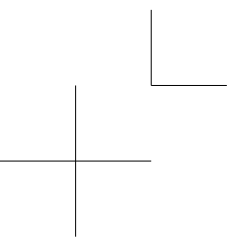
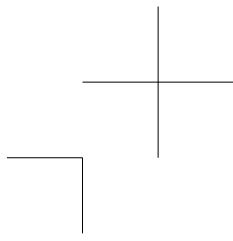
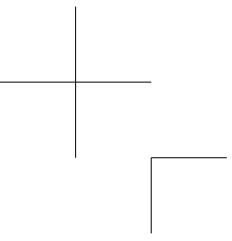


*Alla piccola Charlotte*

*Di tre specie sono al mondo gli ignoranti:  
il primo che non sa  
il secondo che non vuol sapere  
il terzo che pretende di sapere*

*G. BASILE, *Lo Cunto de li Cunti**





## Presentazione

Questo testo è diviso in due parti. La Parte I tratta della teoria classica dei sistemi dinamici a stati continui, sia lineari che non lineari, partendo dalla costruzione dei modelli, per arrivare al progetto dei regolatori dinamici in variabili di stato, passando per l'analisi delle caratteristiche strutturali dei sistemi (stabilità, raggiungibilità, etc.). L'esposizione segue l'impianto tradizionale della materia, così come essa è solitamente trattata in moduli di insegnamento classici quali Teoria dei Sistemi o Fondamenti di Automatica. Particolare enfasi è data allo studio delle proprietà specifiche dei sistemi lineari e tempo invarianti. I contenuti della Parte I sono propedeutici agli insegnamenti dei moduli denominati genericamente Controlli Automatici, che hanno invece per obiettivo principale il progetto di sistemi di controllo, tipicamente tramite tecniche basate sulla sintesi in frequenza. Questi argomenti sono trattati ad esempio nel testo [4], che si suggerisce come complemento alla presente esposizione.

La Parte II tratta invece argomenti meno "ortodossi" nella Automatica classica, ma di grande utilità per la comprensione dei modelli di base della moderna automazione dei processi industriali e produttivi. In questa parte si introducono i sistemi ad eventi discreti e le tecniche di base per la loro simulazione e per l'analisi delle prestazioni. Si studiano particolari modelli stocastici detti catene di Markov, e si forniscono le nozioni introduttive generali per lo studio della teoria delle code.

Il testo è strutturato in modo da consentire un impiego sia in corsi di tipo specialistico, che richiedono approfondimenti ed aperture verso concetti di natura più avanzata, sia in corsi di primo livello, dove occorre invece concentrarsi sui concetti essenziali della materia. A tal fine è stata introdotta una semplice notazione per contrassegnare quelle parti che richiedono uno sforzo di comprensione maggiore, o che introducono concetti avanzati o approfondimenti, o ancora che contengono dettagli tecnici (ad esempio dimostrazioni) che non sono strettamente necessari per la comprensione della linea generale del discorso. Queste parti sono contrassegnate dal simbolo ♠ posto all'inizio dei relativi paragrafi. Nello stesso spirito, sono stati contrassegnati con il simbolo ♥ quei risultati che si ritengono fondamentali e sui quali il lettore è invitato a soffermarsi con particolare attenzione.

**Nota alla seconda Edizione**

Questa seconda edizione del testo presenta numerosi miglioramenti ed estensioni rispetto all'edizione precedente. Molti errori sono stati corretti grazie alle segnalazioni di colleghi e studenti. I capitoli 14 (sui sistemi a dati campionati) e 19 (sull'analisi statistica dei dati di simulazione) sono inediti, mentre i capitoli 16 e 17 (sulle catene di Markov) sono stati modificati in maniera sostanziale rispetto alla precedente edizione. Le sezioni 13.3 (sulla parametrizzazione dei controllori stabilizzanti) e 18.7 (sulle reti chiuse di code) sono state aggiunte, e diversi paragrafi sono stati rieditati.

Ringrazio vivamente tutti i colleghi che hanno fornito utili suggerimenti e che hanno "testato il testo" sul campo; tra questi ringrazio in particolare Basilio Bona, Fabrizio Dabbene, Marina Indri e Michele Taragna.

Ringrazio anticipatamente anche tutti coloro che volessero segnalarmi gli inevitabili errori o imprecisioni ancora presenti nel testo, inviando un messaggio e-mail all'indirizzo [giuseppe.calafiore@polito.it](mailto:giuseppe.calafiore@polito.it).

A questo testo è dedicata una pagina web raggiungibile all'indirizzo:  
<http://staff.polito.it/giuseppe.calafiore/ELAUT2/elaut.htm>

Questa pagina contiene varie informazioni e aggiornamenti relativi al testo, un *errata corrige*, nonché tutti i files Matlab e Simulink appositamente sviluppati e menzionati nel testo.

G.C.

Torino, Agosto 2007

# Indice

<b>I</b>	<b>Sistemi a Stati Continui</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Sistemi e Modelli</b>	<b>3</b>
1.1	Sistemi meccanici in traslazione . . . . .	4
1.1.1	Il sistema massa-molla-smorzatore . . . . .	5
1.1.2	L'accelerometro . . . . .	6
1.1.3	La sospensione attiva . . . . .	7
1.2	Sistemi meccanici in rotazione . . . . .	9
1.2.1	Il pendolo semplice . . . . .	9
1.2.2	Il satellite . . . . .	10
1.2.3	La testina di una stampante . . . . .	12
1.3	Reti elettriche . . . . .	13
1.3.1	Risonatori RLC . . . . .	14
1.3.2	L'oscillatore di Van der Pol . . . . .	15
1.4	Sistemi elettro-meccanici . . . . .	16
1.4.1	Il motore elettrico in corrente continua . . . . .	16
1.4.2	Motore elettrico con accoppiamento elastico al carico . . . . .	17
1.4.3	Il levitatore magnetico . . . . .	18
1.5	Sistemi idraulici . . . . .	19
1.5.1	La legge di Bernoulli . . . . .	22
1.5.2	Sistema a tre serbatoi . . . . .	22
1.5.3	L'attuatore idraulico . . . . .	23
1.6	Sistemi termici . . . . .	25
1.6.1	Il boiler elettrico . . . . .	26
1.7	Il metodo delle equazioni di Lagrange . . . . .	28
1.7.1	Sistema masse-molle-smorzatore . . . . .	29
1.7.2	Il pendolo inverso . . . . .	31
1.7.3	Ball-and-beam . . . . .	32
1.7.4	Il doppio pendolo inverso . . . . .	34
1.7.5	Il regolatore di Watt . . . . .	36

1.7.6	Rete elettrica . . . . .	38
1.7.7	Equivalenze tra variabili generalizzate . . . . .	39
1.8	Sistemi a tempo discreto . . . . .	39
1.8.1	Sistemi a classi di età . . . . .	40
1.8.2	Modelli di Volterra . . . . .	41
1.8.3	Equilibrio economico domanda-offerta . . . . .	42
1.8.4	L'algoritmo di Newton . . . . .	43
1.8.5	Sistemi ottenuti per campionamento . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Segnali e Trasformate</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	Segnali a tempo continuo e discreto . . . . .	45
2.1.1	Combinazioni lineari di segnali . . . . .	47
2.1.2	Segnali di test a tempo continuo . . . . .	47
2.1.3	Segnali di test a tempo discreto . . . . .	54
2.2	Approssimazione di segnali . . . . .	58
2.2.1	Approssimazione tramite segnali a gradino . . . . .	58
2.2.2	Approssimazione tramite segnali polinomiali . . . . .	60
2.2.3	Norme di segnali . . . . .	62
2.3	Interazione tra segnali e sistemi dinamici . . . . .	63
2.4	Rappresentazione dei segnali nel dominio complesso: Trasformate . . . . .	65
2.4.1	La trasformata di Laplace . . . . .	65
2.4.2	Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	68
2.4.3	Tabelle riassuntive sulle trasformate di Laplace . . . . .	73
2.4.4	Antitrasformate di funzioni razionali . . . . .	76
2.4.5	La trasformata Zeta . . . . .	82
2.4.6	Proprietà della trasformata Zeta . . . . .	83
2.4.7	Antitrasformate Zeta . . . . .	86
<b>3</b>	<b>La Rappresentazione in Variabili di Stato</b> . . . . .	<b>89</b>
3.1	Movimenti e traiettorie di stato e di uscita . . . . .	92
3.1.1	Stati ed uscite di equilibrio . . . . .	96
3.1.2	Soluzione numerica delle equazioni di stato . . . . .	98
3.2	Scelta delle variabili di stato . . . . .	100
3.3	Sistemi lineari $\heartsuit$ . . . . .	101
3.3.1	Classificazione dei sistemi lineari . . . . .	106
3.4	Sistemi a tempo discreto . . . . .	106
3.4.1	Sistemi lineari a tempo discreto . . . . .	108
3.5	Esempi di rappresentazioni di stato . . . . .	108
3.5.1	Il sistema massa-molla-smorzatore . . . . .	108
3.5.2	Il satellite . . . . .	109
3.5.3	Il motore elettrico . . . . .	109
3.5.4	La dinamica del prezzo . . . . .	110
3.5.5	Equazioni differenziali e alle differenze di ordine $n$ . . . . .	111
<b>4</b>	<b>La Linearizzazione della Rappresentazione di Stato</b> . . . . .	<b>117</b>
4.1	Linearizzazione nell'intorno del movimento nominale . . . . .	117
4.1.1	Linearizzazione nell'intorno di un equilibrio $\heartsuit$ . . . . .	121
4.1.2	Linearizzazione per sistemi a tempo discreto . . . . .	124



<b>5</b>	<b>La Stabilità dell'Equilibrio</b>	<b>125</b>
5.1	Preliminari e definizioni . . . . .	126
5.1.1	Simulazioni numeriche: gli stati di equilibrio del pendolo . . . . .	129
5.2	Teoria di Lyapunov della stabilità $\heartsuit$ . . . . .	130
5.2.1	Stima del dominio di attrazione . . . . .	134
5.2.2	Teoremi di instabilità . . . . .	135
5.2.3	Esempi di applicazione della teoria di Lyapunov . . . . .	136
5.2.4	La teoria di Lyapunov per i sistemi a tempo discreto . . . . .	140
5.3	La teoria di Lyapunov per i sistemi LTI . . . . .	142
5.3.1	Una funzione di Lyapunov "universale" per i sistemi LTI . . . . .	143
5.3.2	L'equazione di Lyapunov per i sistemi LTI a tempo discreto . . . . .	146
5.4	Il metodo di Lyapunov indiretto $\heartsuit$ . . . . .	147
<b>6</b>	<b>Evoluzione dello Stato nei Sistemi LTI</b>	<b>155</b>
6.1	Sistemi LTI a tempo continuo . . . . .	155
6.1.1	Il movimento libero . . . . .	156
6.1.2	Espansione modale della risposta libera $\heartsuit$ . . . . .	158
6.1.3	Il movimento forzato . . . . .	167
6.2	Sistemi LTI a tempo discreto . . . . .	168
6.2.1	Espansione modale della risposta libera . . . . .	170
6.3	Esempi di calcolo del movimento . . . . .	177
<b>7</b>	<b>La Stabilità dei Sistemi LTI</b>	<b>183</b>
7.1	Stabilità e autovalori $\heartsuit$ . . . . .	185
7.1.1	Decadimento esponenziale della risposta libera . . . . .	188
7.2	Stabilità asintotica e comportamento stazionario $\heartsuit$ . . . . .	189
7.3	Criteri algebrici di stabilità $\heartsuit$ . . . . .	192
7.3.1	Criteri per sistemi a tempo continuo . . . . .	193
7.3.2	Criteri per sistemi a tempo discreto . . . . .	197
7.4	Esempi . . . . .	198
<b>8</b>	<b>La Relazione Ingresso–Stato</b>	<b>203</b>
8.1	Controllabilità e raggiungibilità per sistemi LTI a tempo continuo . . . . .	208
8.1.1	Nozioni riassuntive $\heartsuit$ . . . . .	217
8.2	Controllabilità e raggiungibilità per sistemi LTI a tempo discreto . . . . .	219
8.2.1	Il Gramiano di raggiungibilità a tempo discreto . . . . .	223
8.2.2	Pianificazione dell'ingresso . . . . .	223
8.2.3	Nozioni riassuntive $\heartsuit$ . . . . .	226
8.3	Rappresentazioni equivalenti e forme canoniche . . . . .	226
8.3.1	Forma canonica di Kalman di non raggiungibilità . . . . .	229
8.3.2	La forma canonica di raggiungibilità . . . . .	236
8.3.3	La forma canonica di controllo . . . . .	237
8.3.4	La forma canonica diagonale . . . . .	239
8.4	Criteri di PBH . . . . .	240
<b>9</b>	<b>La Relazione Stato–Uscita</b>	<b>243</b>
9.1	Dualità e osservabilità . . . . .	243
9.1.1	Gramiano di osservabilità . . . . .	247

9.1.2	Osservabilità e ricostruzione dello stato iniziale . . . . .	247
9.2	Forma canonica di Kalman di non osservabilità . . . . .	249
9.3	Il sottosistema raggiungibile ed osservabile . . . . .	253
9.4	Altre forme canoniche . . . . .	258
9.4.1	La forma canonica di osservabilità . . . . .	258
9.4.2	La forma canonica di osservatore . . . . .	258
9.4.3	La forma canonica diagonale . . . . .	259
9.5	Criteri di PBH di osservabilità . . . . .	259
<b>10</b>	<b>Analisi dei Sistemi LTI nel Dominio Complesso</b>	<b>261</b>
10.1	Trasformata di Laplace e sistemi LTI a tempo continuo . . . . .	261
10.1.1	La matrice di trasferimento $\heartsuit$ . . . . .	262
10.1.2	Funzione di trasferimento e risposta all'impulso . . . . .	267
10.1.3	Matrici di trasferimento per sistemi equivalenti . . . . .	267
10.1.4	La stabilità BIBO $\heartsuit$ . . . . .	271
10.1.5	Calcolo della risposta forzata . . . . .	276
10.1.6	La risposta al gradino . . . . .	277
10.1.7	La risposta in regime permanente $\heartsuit$ . . . . .	282
10.2	Trasformata Zeta e sistemi LTI a tempo discreto . . . . .	286
10.2.1	La matrice di trasferimento . . . . .	287
10.2.2	Funzione di trasferimento e risposta all'impulso . . . . .	288
10.2.3	Matrici di trasferimento per sistemi equivalenti . . . . .	289
10.2.4	La stabilità BIBO . . . . .	289
10.2.5	Calcolo della risposta forzata . . . . .	290
10.2.6	La risposta in regime permanente $\heartsuit$ . . . . .	290
10.3	Il problema della realizzazione . . . . .	293
10.3.1	Realizzazione in forma canonica di controllo . . . . .	294
10.3.2	Realizzazione in forma canonica di osservatore . . . . .	295
<b>11</b>	<b>Il Controllo per Retroazione dello Stato</b>	<b>297</b>
11.1	La retroazione statica dello stato $\heartsuit$ . . . . .	297
11.1.1	Assegnazione degli autovalori . . . . .	299
11.1.2	Procedura alternativa per il calcolo del guadagno di retroazione . . . . .	302
11.1.3	Assegnazione degli autovalori per sistemi non raggiungibili . . . . .	305
11.1.4	Il regolatore . . . . .	309
11.2	Il regolatore ottimo lineare quadratico (LQR) . . . . .	313
11.2.1	LQR a tempo discreto . . . . .	315
11.3	Regolazione dell'equilibrio per sistemi non lineari . . . . .	316
<b>12</b>	<b>La Stima Asintotica dello Stato</b>	<b>321</b>
12.1	L'osservatore asintotico $\heartsuit$ . . . . .	321
12.1.1	Assegnazione degli autovalori della dinamica di errore . . . . .	323
12.1.2	L'osservatore per sistemi non completamente osservabili . . . . .	324
12.2	La stima ottima dello stato . . . . .	327
<b>13</b>	<b>Il Controllo per Retroazione Dinamica dell'Uscita</b>	<b>333</b>
13.1	La retroazione sugli stati stimati $\heartsuit$ . . . . .	333
13.1.1	Stabilizzazione tramite retroazione dinamica delle uscite . . . . .	337

13.1.2	Retroazione con segnale di riferimento . . . . .	337
13.2	Il controllo dinamico sul modello esteso del sistema . . . . .	340
13.2.1	Il controllo a due gradi di libertà . . . . .	343
13.3	Parametrizzazione di tutti i controllori stabilizzanti ♠ . . . . .	344
13.4	L'anello di controllo classico . . . . .	348
13.4.1	L'anello di controllo a retroazione unitaria . . . . .	350
13.5	La regolazione dell'equilibrio di sistemi non lineari ♥ . . . . .	353
<b>14</b>	<b>Sistemi a Dati Campionati</b> . . . . .	<b>357</b>
14.1	I convertitori D/A e A/D . . . . .	358
14.1.1	Il convertitore D/A ideale . . . . .	358
14.1.2	Il convertitore A/D ideale . . . . .	361
14.2	Rappresentazione di stato del sistema campionato . . . . .	363
14.2.1	Calcolo delle matrici di stato $A_T$ e $B_T$ . . . . .	364
14.2.2	Autovalori del sistema campionato . . . . .	366
14.3	La funzione di trasferimento del sistema campionato . . . . .	373
14.4	Proprietà strutturali . . . . .	376
14.4.1	Stabilità . . . . .	377
14.4.2	Raggiungibilità e osservabilità . . . . .	377
14.5	Analisi in frequenza dei segnali ad impulsi . . . . .	379
14.5.1	Trasformate di segnali a impulsi e delle sequenze corrispondenti . . . . .	380
14.5.2	Relazione tra $X(s)$ e $X^*(s)$ . . . . .	380
14.5.3	Il ricostruttore di Shannon . . . . .	383
14.5.4	Analisi in frequenza del filtro ZOH . . . . .	386
<b>II</b>	<b>Sistemi a Stati Discreti</b> . . . . .	<b>391</b>
<b>15</b>	<b>Sistemi Dinamici ad Eventi Discreti (DEDS)</b> . . . . .	<b>393</b>
15.1	Automati temporizzati . . . . .	398
15.1.1	Calcolo delle statistiche sul sample path . . . . .	404
15.2	Automati stocastici . . . . .	406
15.3	I processi di Poisson . . . . .	409
15.3.1	La distribuzione esponenziale . . . . .	409
15.3.2	Il contatore di Poisson . . . . .	415
15.3.3	Automati stocastici con orologio di Poisson . . . . .	423
<b>16</b>	<b>Catene di Markov a Tempo Discreto</b> . . . . .	<b>425</b>
16.1	Le equazioni di Chapman-Kolmogorov a tempo discreto . . . . .	433
16.2	Distribuzioni invarianti . . . . .	435
16.3	Classificazione degli stati . . . . .	437
16.3.1	Stati ricorrenti, transienti e periodici . . . . .	438
16.3.2	Probabilità e tempi di entrata . . . . .	441
16.4	Analisi stazionaria . . . . .	443
16.5	Catene finite: Teoremi di Perron-Frobenius . . . . .	444
16.6	Calcolo di medie temporali . . . . .	447
16.7	Alcuni esempi . . . . .	448

<b>17 Catene di Markov a Tempo Continuo</b>	<b>455</b>
17.1 Le equazioni di Chapman-Kolmogorov a tempo continuo . . . . .	456
17.2 Distribuzioni invarianti (o di equilibrio) . . . . .	461
17.3 Classificazione degli stati . . . . .	462
17.3.1 Probabilità e tempi di entrata . . . . .	463
17.4 Analisi stazionaria . . . . .	464
17.5 Probabilità di processo e temporali . . . . .	465
17.6 Esempi . . . . .	466
17.7 Processi di nascita-morte . . . . .	469
17.7.1 Il processo di sola nascita . . . . .	470
17.7.2 Analisi asintotica dei processi nascita-morte . . . . .	472
<b>18 Teoria Elementare delle Code</b>	<b>475</b>
18.1 Modelli di code e notazione di Kendall . . . . .	475
18.2 Indici di prestazioni di una coda . . . . .	477
18.2.1 Legge di Little . . . . .	480
18.2.2 PASTA . . . . .	483
18.3 La coda $M/M/1$ . . . . .	484
18.3.1 Prestazioni a regime della coda $M/M/1$ . . . . .	485
18.4 La coda $M/M/m$ . . . . .	486
18.4.1 Prestazioni a regime della coda $M/M/m$ . . . . .	489
18.4.2 Il biservente: $M/M/2$ . . . . .	492
18.4.3 Il processo di uscita da una risorsa $M/M/m$ . . . . .	494
18.4.4 La coda $M/M/\infty$ . . . . .	497
18.5 La coda $M/M/m/c$ . . . . .	498
18.5.1 La coda $M/M/1/c$ . . . . .	499
18.5.2 La coda $M/M/m/m$ . . . . .	502
18.6 Reti aperte di code $M/M/m$ . . . . .	506
18.7 Reti chiuse di code $M/M/m$ . . . . .	511
<b>19 Simulazione e Analisi Statistica dei Dati</b>	<b>517</b>
19.1 Le stime statistiche campionarie . . . . .	518
19.1.1 La media campionaria . . . . .	518
19.1.2 Intervalli di confidenza per la media campionaria . . . . .	520
19.1.3 La varianza campionaria . . . . .	522
19.1.4 Il caso Gaussiano . . . . .	523
19.1.5 Distribuzione di Student e intervalli di confidenza . . . . .	524
19.1.6 La probabilità campionaria . . . . .	525
19.1.7 Stima a istogramma della densità di probabilità . . . . .	527
19.1.8 Il test del Chi-quadro . . . . .	529
19.2 Stima su processi stocastici . . . . .	530
19.2.1 La stima dai dati di simulazione . . . . .	532
19.2.2 Il metodo delle repliche indipendenti . . . . .	533
19.2.3 Il metodo delle medie di segmento . . . . .	534
<b>A Vettori e Matrici</b>	<b>535</b>
A.1 Vettori . . . . .	535
A.2 Matrici . . . . .	536

---

A.2.1	Determinanti, matrici singolari, matrice inversa . . . . .	537
A.2.2	Autovalori, autovettori e basi canoniche . . . . .	539
A.2.3	Matrici a struttura speciale . . . . .	542
A.2.4	Fattorizzazione ai valori singolari . . . . .	544
A.3	Matrici simmetriche e definite . . . . .	545
A.4	Matrici non-negative . . . . .	545
A.5	Sistemi di equazioni lineari . . . . .	546
A.5.1	Soluzione a minimo errore quadratico (minimi quadrati) . . . . .	547
A.5.2	Soluzione a norma minima . . . . .	548
<b>B</b>	<b>Probabilità, Variabili Casuali e Distribuzioni</b>	<b>549</b>
B.1	Probabilità . . . . .	549
B.2	Variabili casuali, distribuzioni e densità . . . . .	550
B.2.1	Valore atteso e varianza . . . . .	551
B.2.2	Somma di variabili casuali indipendenti . . . . .	553
B.2.3	Minimo di due variabili casuali indipendenti . . . . .	553
B.2.4	Esempi di densità continue . . . . .	554
B.2.5	Esempi di densità discrete . . . . .	555
B.3	Funzioni generatrici di probabilità per variabili discrete . . . . .	556
B.4	Funzioni generatrici di probabilità per variabili continue . . . . .	558
B.5	Generazione di variabili casuali . . . . .	560
B.6	Analisi combinatoriale . . . . .	562
	<b>Indice analitico</b>	<b>565</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>573</b>